EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN Dr H. STREEFKERK EN P. WIJDENES
OFFICIEEL ORGAAN VAN LIWENAGEL EN VAN WIMECOS

24e JAARGANG 1948/49
Nr 3

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen. Prijs per jaargang *f* 8.00*. Zij die nevens op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde (*f* 8.00*) zijn ingetekend, betalen *f* 6.75*.

De leden van Liwenagel (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van Wimecos (Vereeniging van leeraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie aan Hogere Burgerscholen en Lycea) krijgen Euclides toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van Liwenagel storten de abonnementskosten ten bedrage van *f* 2,50 op de postgirorekening no. 59172 van Dr. H. Ph. Baudet te 's-Gravenhage. De leden van Wimecos storten hun contributie voor het verenigingsjaar van 1 September 1948 t/m 31 Augustus 1949 (waarin de abonnementskosten op Euclides begrepen zijn) ten bedrage van *f* 4,50 op de postgirorekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam. Ook voor 1 September 1949—1 September 1950 is de contributie vastgesteld op *f* 4,50. De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593 van de firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van Liwenagel of Wimecos. Deze bedragen *f* 6,75 per jaar franco per post.

Artikelen ter opneming te zenden aan Dr H. Streefkerk, Hilversum, Van Lenneplaan 16, Tel. K 2950; 5558.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstr. 88; Tel. K 2900; 27119.

INHOUD.

Oordeel over Eindexamenvraagstukken van 1949.

In verband met het op de laatste Algemene Vergadering aangenomen voorstel zal het Bestuur van Wimecos het op prijs stellen een goed gefundeerd oordeel over de eindexamenvraagstukken van het jaar 1949 te ontvangen. Indien de opmerkingen der leden hier aanleiding toe geven, kunnen dan aan de autoriteiten bepaalde wensen ter kennis gebracht worden.

De Secretaris: J. J. TEKELENBURG.

HET CONFERENTIE-WEEKEND OP HET MAARTEN-MAARTENS-HUIS TE DOORN GEORGANISERED DOOR DE WISKUNDE WERKGROEP DER W.V.O.

De Wiskunde Werkgroep der W.V.O. [1]) (Werkgemeenschap voor Vernieuwing van Onderwijs en Opvoeding), die spoedig na de bevrijding haar vooroorlogse activiteit hervatte onder leiding van de Heer J. R. Janssen (Bussum) als Voorzitter en met als Secretaris de Heer H. J. Jacobs Jr. (Hobbemalaan 66, Bilthoven), is de eerste onder de werkgroepen der W.V.O., die, overeenkomstig een besluit der Centrale Werkgroep, thans een conferentie-weekend heeft georganiseerd. Tot nu toe was haar activiteit beperkt gebleven tot maandelijkse vergaderingen in kleine kring, die beurtelings werden gehouden te Amsterdam, Utrecht of Leiden (ten huize van Mw. Ehrenfest). In deze besprekingen werden meestal vragen van didactiek, in de laatste tijd echter vooral systematisch alle problemen van het onderwijs-programma behandeld. Aan de oproep tot het op 13/14 Nov. 1948 in het Maarten-Maartens-Huis te Doorn gehouden weekend werd door 48 belangstellenden gehoor gegeven, waarvan de meesten niet-leden van de Werkgroep. (Zie onder de deelnemerslijst!) De conferentie stond onder leiding van Prof. Dr H. Freudenthal; er werden inleidingen gehouden door Dr L. N. H. Bunt, Prof. Dr H. Freudenthal en de Heer P. M. van Hiele. Van deze lezingen en de discussies, die op een zeer hoog peil stonden, vindt de lezer hier de verslagen.

Het ligt in de bedoeling, dergelijke bijeenkomsten op gezette tijden te herhalen.

Deelnemerslijst.

S. Bartlema	L. van Oostenburg 33	Voorburg
Ir A. P. C. v. Beek.	L. van Meerdervoort 345	Den Haag
H. van Bommel.	Kerkstraat 20	Utrecht
J. J. Boogaard	Diepenbrocklaan 18	Bilthoven
H. J. Boom Jr	Paulinastraat 36	Hengelo (O.)
Dr P. Bronkhorst	Eksterlaan 7	Eindhoven
Dr L. N. H. Bunt	J. P. Thijsselaan 89	Utrecht
Dr J. Drost	St. Canisius-college	Nijmegen
W. S. H. Elte	Willemsparkweg 61	Amsterdam (Z)

[1]) Het lidmaatschap van de Werkgroep is ook verkrijgbaar voor niet-leden van de W.V.O.

Prof. Dr. H. Freudenthal (Voorzitter van de conferentie)	Fr. Schubertstraat 44	Utrecht
Mej. A. H. M. v. d. Geijn . .	Baanstraat 2A	Alkmaar
S. J. Geursen.	Heiligestraat 16	Tiel
H. Geurts	St. Canisius-college	Nijmegen
Zr Clementine Hamers. . . .	St. Theresia-Lyceum	Tilburg
Dr A. van Haselen	Papesteeg 35	Tiel
P. M. van Hiele	Rio Grandelaan 36	Overveen
Mevr. D. van Hiele-Geldof. .	Rio Grandelaan 36	Overveen
H. J. Jacobs Jr. (Secretaris van de Wiskunde Werkgroep)	Hobbemalaan 66	Bilthoven
J. R. Janssen (Voorzitter Wiskundige Werkgroep)	Fortlaan 9a	Bussum
Zr Wilhelma de Jong	St. Theresia-Lyceum	Tilburg
D. Kijne	Emantsstraat 11	Den Haag
Mej. G. M. Langeler.	Korte Kade 115b	Rotterdam (O.)
J. H. de Leth	Leliestraat 54	Koog a/d Zaan
D. Leujes	Frans Halsplein 21b	Schiedam
Ir K. H. P. Nieukerke . . .	Minrebroederstraat 26bis	Utrecht
A. Orie	„De Breul"	Zeist
Dr W. F. van Peype	van Lyndenstraat 14	Soest
Joh. C. Poll	Joh. de Wittstraat 35	Dordrecht
F. Prak	Tollensstraat 8	Arnhem
A. O. Reckendorf	Hammerweg 61	Ommen
Dr D. J. E. Schrek (vertegenwoordiger van Liwenagel)	Sweelinckstraat 1	Utrecht
B. W. Steggerda	Arksteestraat 8	Nijmegen
Dr H. Streefkerk	van Lenneplaan 16	Hilversum
H. J. Struik, zenuwarts .	Swaefkenstraat 1a	Deventer
J. K. Timmer	Weesperzijde 111	Amsterdam (Z.)
Dr M. van Tol	Baronielaan 80	Breda
Dr H. Turkstra.	Sophialaan 13	Hilversum
Mej. A. B. Veuger	Gousdbloemlaan 46	Den Haag
Ir W. H. Veldhuis	van Montfoortlaan 21	Den Haag
Dr P. G. J. Vredenduin . . .	Bakenbergseweg 158	Arnhem
Dr. Joh. Wansink.	Julianalaan 84	Arnhem
Dr H. Mooij	Churchilllaan 107	Amsterdam
H. Th. Otten.	Witsenburgselaan 38	Nijmegen
J. Ph. Steller.	Kersbergenplein 11	Zeist
E. Abas	van Goyenlaan 16	Bilthoven
Dr T. J. Boks	P. de Hooghlaan 26	Hilversum
J. M. Hummelen	Chr. Lyceum	Hilversum
J. H. van Dam.	van Oosthuysenlaan 11A	Driebergen

DE KEUZE VAN DE LEERSTOF BIJ HET ONDERWIJS IN DE WISKUNDE [1])

door

Dr L. N. H. BUNT.

Het programma van deze conferentie vermeldt twee inleidingen, die uitsluitend betrekking hebben op het onderwijs in de wiskunde. De eerste gaat over de leerstof, de tweede over de manier, waarop de leerstof kan worden onderwezen. Bovendien zijn deze twee voordrachten min of meer nadrukkelijk van elkaar gescheiden door een voordracht van geheel andere aard, waardoor de indruk zou kunnen worden gewekt; dat die twee onderwerpen nu ook niets met elkaar te maken hebben. Evenwel, wanneer wij het hebben over leerstof, waarvan behandeling op de middelbare school (gymnasium, h.b.s., lyceum) wenselijk wordt geoordeeld, dan bedoelen wij nooit de leerstof op zich zelf, maar we bedoelen de leerstof, bekeken vanuit een bepaald gezichtspunt en behandeld op een bepaalde manier; en wanneer wij zeggen, dat een onderwerp geschikt is voor de middelbare school, dan bedoelen wij niet, dat het gelijkelijk geschikt is voor de laagste en voor de hoogste klas, maar wij denken onwillekeurig aan de behandeling in een bepaald leerjaar. Wanneer wij dus spreken over het kiezen van de leerstof, moeten wij wel bedenken, dat de methodiek van het vak niet tijdelijk buiten boord gezet kan worden. Het zal dan ook niet mogelijk zijn een absolute afbakening tot stand te brengen tussen het terrein van de derde spreker en dat van de eerste op deze conferentie, en U zult bij het luisteren naar deze twee voordrachten misschien af en toe wel een ogenblik hebben, waarop het Uw aandacht trekt, dat er al of niet een zelfde inzicht bestaat bij de twee inleiders. De methode van lesgeven zal echter door mij zo veel mogelijk onaangeroerd worden gelaten en slechts dan ter sprake komen, wanneer het niet wel mogelijk is de leerstof te beschouwen zonder de methode.

Naar ik uit de verslagen van voorafgegane vergaderingen van de Wiskunde-werkgroep heb kunnen opmaken, is er in deze kring al heel wat te doen geweest over de kwestie van de leerstof. Verscheidene leden van deze werkgroep hebben hun mening uitge-

---

[1]) Inleiding, gehouden 13 November 1948 op het conferentie-weekend te Doorn, georganiseerd door de Wiskunde-werkgroep der W.V.O.

sproken en enkelen hebben zelfs reeds een soort minimum- of maximumprogramma voorgesteld. Ik weet niet, in hoeverre U het onderling reeds eens geworden zijt over deze programma's; ik vermoed, dat er van een grote mate van eensgezindheid nog wel niet gesproken zal kunnen worden, en mij bekroop zelfs een ogenblik de vrees, dat het uw bedoeling was om op deze conferentie nu eens spijkers met koppen te doen slaan en dat U een inleiding verwachtte, welke onmiddellijk zou leiden tot een voorstel inzake definitieve programma's voor de verschillende onderdelen van de wiskunde-leerstof. Dat het dus in Uw voornemen lag om bij deze gelegenheid precies te gaan vaststellen wat wel en wat niet op de programma's thuis hoort. Maar ik mag niet aannemen, dat U zo naief zou kunnen zijn. En voor zover U nog een ogenblik aan deze mogelijkheid gedacht mocht hebben, zal ik trachten U in dit uur er van te overtuigen, dat er zeer veel vast zit aan dit probleem en dat wij er verre van verwijderd zijn om definitief te kunnen uitmaken, hoe ons onderwijs dient te zijn ingericht, wat betreft de keuze van de leerstof.

Om te beginnen, wat bedoelen we met „leerstof"? Deze term kan verschillende betekenissen hebben. We kunnen ermee bedoelen een zeker complex van eigenschappen, die men in de practijk kan gebruiken, die men dus dient te kennen en in het gebruik waarvan men dient te zijn geoefend. Maar dan hebben wij het direct al over twee gans verschillende dingen, het „kennen" van zekere eigenschappen en het „kunnen werken" met die eigenschappen. Wat bedoelen wij dan met „kennen"? Betekent dit, dat die eigenschappen woordelijk moeten kunnen worden gereproduceerd; dat men ze op correcte manier zelfstandig onder woorden moet kunnen brengen; dat ze alleen maar worden onthouden aan de hand van een figuur of door middel van een zekere schematische voorstelling; of dat ze zó gekend worden, dat ze eerst dan in het geheugen terugkeren, wanneer ze in een tekst worden toegepast of door een spreker worden gebezigd en daarbij expliciet genoemd? Is het slechts tijdelijk, dat deze eigenschappen moeten worden gekend, bijv. om te worden gebruikt bij het leren van andere eigenschappen of het verwerven van inzicht in andere vakken, mogen ze daarna worden vergeten of moeten ze worden onthouden tot op het eindexamen? En hoe staat het met de bewijzen van die eigenschappen; moeten deze ook worden gekend, en wat bedoelen wij dan ditmaal met „kennen"? Moet de leerling in staat zijn zo'n bewijs op de volgende les zonder hulp, in eigen woorden, op correcte manier voor te

dragen of op te schrijven; wanneer het gaat om een meetkundige eigenschap, mag hij zich bij het reproduceren dan bedienen van de stand, waarin de figuur in het boek voorkomt en van dezelfde letters; of wordt de eis gesteld, dat hij de eigenschap kan bewijzen voor een figuur in totaal willekeurige stand en met door de leraar erbij geplaatste letters? Moet de leerling dit bewijs onmiddellijk, snel, vanaf het gegeven tot en met het quod erat demonstrandum, synthetisch, op de manier, waarop het meestal in de schoolboeken staat, kunnen weergeven, of behoeft hij slechts in staat te zijn het bewijs te kunnen terugvinden, wanneer hij gelegenheid krijgt om, steunende op hetgeen hij op de vorige les heeft geleerd en de vorige dag thuis heeft bestudeerd, een analyse te maken. Moet hij dit voorts geheel zelfstandig presteren of is de leraar genegen hem daarbij, wanneer het weergeven mondeling plaats vindt, te hulp te komen als hem een schakel niet wil te binnen schieten. En indien de eigenschap zelf permanent dient te worden onthouden, is dit dan ook het geval met het bewijs; mag dit, na één keer goed gekend te zijn, worden vergeten, moet het worden onthouden tot de eerstvolgende repetitie, tot aan de overgang of tot aan het eindexamen? Of behoort het in die zin tot de leerstof, dat het wel in de klas wordt behandeld, maar niet nader hoeft te worden bestudeerd?

En wat betreft het geoefend zijn in het gebruik van een eigenschap, hoever gaat dit? Wordt daarmee bedoeld, dat men de eigenschap dan kan toepassen, wanneer men uitdrukkelijk op het feit wordt attent gemaakt, dat deze tot het beoogde doel kan leiden; moet de leerling, wanneer hij een analyse maakt en nagaat over welke hulpmiddelen hij beschikt om een bepaald probleem te behandelen, in staat zijn onder deze hulpmiddelen eventueel de bewuste stelling aan te treffen en op eigen initiatief in te zien, dát hij deze in het onderhavige geval kan toepassen; of wordt de eis gesteld, dat hij de eigenschap zo paraat heeft, dat hij bij voorkomende gelegenheden onmiddellijk daaraan denkt en hem toepast? En dan vragen wij onmiddellijk verder: hoe zit dat met die voorkomende gelegenheden; hoever wenst men daarmee te gaan? Het kan immers gebeuren, dat het toepassen van de eigenschap in kwestie heel eenvoudig en ook schijnbaar voor de hand liggend is, maar dat niettemin een of andere camouflage in het probleem bewerkt, dat een leerling niet aan de bewuste stelling denkt; een onderwerp waaraan ik bij een andere gelegenheid een beschouwing heb gewijd [1]).

[1]) Over moeilijkheden van structurele aard bij het onderwijs in de meetkunde. Paedagogische Studiën 23 (1946), 178/202.
Moeilijkheden van leerlingen bij het meetkundeonderwijs. Euclides 21 (1945/46), 174/208.

Al deze en meer van dergelijke vragen zou men dienen te beantwoorden, wanneer men eenduidig wilde vaststellen, wat men bedoelt met de leerstof. Maar het beantwoorden van deze vragen is niet zo eenvoudig, en dit komt onder meer, doordat men bij de vraag naar de leerstof eigenlijk vraagt, welke eisen men aan kinderen en jonge mensen dient te stellen. En wanneer wij een eis stellen, moet rekening gehouden worden met twee dingen: de eis dient zowel doelmatig te zijn als redelijk. Over deze twee aspecten wil ik het in mijn inleiding in het bijzonder hebben; ik zal daarbij geen volledigheid beogen, maar mij beperken tot het bespreken van enkele zaken, welke daarbij een rol spelen.

In de eerste plaats: de doelmatigheid. Wij kunnen vragen naar het doel van het onderwijs in de wiskunde in het algemeen, maar wij kunnen ook vragen naar het doel van het behandelen van ieder onderwerp uit de wiskunde afzonderlijk. Wanneer wij ons even beperken tot de meetkunde, dan moeten wij beginnen met de grote lijnen te kennen; wij moeten weten, waar wij, globaal genomen, met die meetkunde naar toe willen, wat wij met het onderwijs in het vak meetkunde beogen; wij moeten dan nagaan of er een bijzondere reden bestaat om juist het vak meetkunde te doceren, wat de speciale voordelen zijn welke een studie van dit vak oplevert. Maar dit helpt ons niet afdoende, wanneer wij een antwoord zoeken op de vraag of wij nu net precies de stelling van Stewart zullen onderwijzen, of wij de eis zullen stellen dat een leerling, laat ons zeggen gedurende 24 uur, de afleiding moet onthouden van de s-formule voor de hoogtelijn, of wij zullen verlangen dat een leerling tot op het eindexamen alle in zijn boek voorkomende bewijzen van de eigenschappen uit de stereometrie zal kunnen reproduceren. Het geeft ons geen antwoord op de vraag of een leerling een bewijs ook moet kunnen geven in een figuur, welke een andere stand heeft dan die in het boek, en evenmin op de vraag of hem daarbij al of niet dient te worden toegestaan, dat hij eerst nog even vlug een analyse maakt. Een antwoord op deze vragen kan pas worden gegeven, wanneer men ten eerste een antwoord op de eerstgenoemde algemene vraag heeft gevonden, en daarbij dan noodzakelijk een analyse zal hebben gemaakt van de doeleinden, die men wenst te bereiken; en wanneer men, in de tweede plaats, heeft beslist op welke wijze men zal trachten die doeleinden te verwezenlijken en heeft nagegeaan wat voor dit verwezenlijken essentiëel is.

Het zal u bekend zijn, dat men op de vraag naar het doel van het onderwijs in wiskunde de meest uiteenlopende antwoorden

heeft gegeven. Men kan die antwoorden in twee categorieën indelen. Ten eerste die antwoorden, die er op neerkomen, dat men een zekere hoeveelheid feitenkennis en een aantal vaardigheden aan de leerlingen wil bijbrengen, daarbij lettende op het zich doen vormen van nauwkeurige begrippen, het vlot leren werken met zekere formules en eigenschappen, het doen zien van de structuur van een stuk theorie. Ten tweede die antwoorden, welke uiting geven aan de wens om de geest van de leerling op een bepaalde manier te beïnvloeden, hem een juiste manier van denken te leren, hem te brengen tot ordelijkheid in het weergeven van zijn gedachten, zijn productief denken te beïnvloeden voor zover mogelijk, hem belangstelling en waardering te doen krijgen voor de wiskunde en haar toepassingen, hem een bepaalde houding tegenover de hem omringende fysische en sociale wereld te doen aannemen. Over deze laatste kant van het onderwijs in de wiskunde is heel wat te doen geweest. De tijd ligt nog niet zo ver achter ons, waarin sommigen meenden de noodzaak van degelijk onderwijs in wiskunde te moeten bestrijden, omdat het nut van dergelijk onderwijs niet voldoende scheen te kunnen worden aangetoond door te wijzen op de practische toepasbaarheid. Men zag toen om naar andere argumenten, die het onderwijs geven in wiskunde moesten rechtvaardigen. Niet dat dit iets geheel nieuws was: reeds Plato, en ook anderen voor hem, eisten een beoefening van wiskunde als propaedeuse voor die van de wijsbegeerte, en dat natuurlijk op andere gronden dan die van practische toepasbaarheid. Er is ook een tijdlang een stroming geweest, welke de argumenten van deze zogenaamde formele training meende te kunnen ontzenuwen. Deze bestrijding gaf aanleiding tot het doen van talrijke onderzoekingen, welke tot resultaat hadden de tegenwoordig algemeen gehuldigde opvatting, dat men de vormende waarde van de leervakken, waaronder de wiskunde, niet ontkent, maar erop wijst, dat men dan in zijn manier van lesgeven er nadrukkelijk mee rekening dient te houden, dat men nog een ander doel beoogt dan alleen het aanbrengen van feitenkennis en technische vaardigheden.

De meest recente opvattingen op dit gebied kunt U omschreven vinden in een tweetal Amerikaanse rapporten over het wiskundeonderwijs, beide verschenen in het jaar 1940. Het ene heeft tot titel: Mathematics in General Education, en is een rapport, uitgebracht door the Comittee on the function of mathematics in general education of the Commission on secondary school curriculum [1]). Deze Commission was op zijn beurt weer ingesteld door

[1]) New-York, Appleton-Century Company.

de Progressive Education Association in 1932, en had de opdracht een onderzoek in te stellen naar de grondslagen van wat wij zouden noemen het algemeen vormend en voorbereidend hoger middelbaar onderwijs [1]). Door een aantal Committees, elk aangewezen voor een bepaald middelbaar-onderwijsvak, werden voor die vakken rapporten uitgebracht, en van deze rapporten gaat er dan dus ook een over de wiskunde.

Het tweede van de bovengenoemde Amerikaanse rapporten is het 15e van de Yearbooks, zoals die voor de oorlog jaarlijks werden uitgegeven door de National Council of Teachers of Mathematics. De ondertitel is: The Place of Mathematics in Secondary Education, en het is uitgebracht door een commissie, die in 1935 was samengesteld door de Mathematical Association of America en de National Council of Teachers of Mathematics [2]). Enkele leden van deze laatste commissie waren tevens lid van de werkgroep, welke het eerstgenoemde rapport opstelde, hetgeen U reeds zal doen vermoeden, dat de twee rapporten op vele punten tot overeenkomstige conclusies moesten geraken. Dit is dan ook inderdaad het geval en daarom zal ik mij thans beperken tot een bespreking van een gedeelte van de inhoud van het tweede rapport, dus van het 15th Yearbook, en ik zal U een indruk trachten te geven van enkele opvattingen, welke in dit rapport zijn neergelegd ten aanzien van de doeleinden, die het onderwijs in wiskunde dient na te streven.

Het tweede hoofdstuk van het rapport behandelt enkele van de doeleinden, die het middelbaar onderwijs zich in het algemeen ziet gesteld, maar beperkt zich daarbij tot die objectieven, welke verband houden met het onderwijs in de wiskunde. Het volgende hoofdstuk gaat dan dieper in op de bijdrage, die in het bijzonder door dit laatste vak kan worden geleverd. Zo wordt er gesproken over de oefening in het denken, maar men vervalt hier niet in de bekende fout om te spreken van een zeker vaag redeneervermogen, een vermogen, dat men zodanig zou kunnen ontwikkelen, dat het in alle daarvoor in aanmerking komende situaties vanzelf zou gaan functioneren. Er wordt integendeel een poging gedaan om een verklaring te geven van wat men onder dit denken dient te verstaan, en wel door enige activiteiten aan te geven, welke moeten dienen om gedragswijzen concreet te maken, welke gepaard gaan met „clear thinking". In de eerste plaats komt daarbij te pas het verzamelen en op een overzichtelijke wijze ordenen van kwantitatieve

[1]) Junior High School, Senior High School en Junior College.
[2]) New-York, Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University.

gegevens, teneinde daaruit vervolgens mogelijke conclusies te trekken. Volgens de opstellers van het rapport heeft het wiskunde-onderwijs zich met die kant van het denken weinig of niet bezig gehouden. Daarvan wordt de schuld gegeven aan het gebrek aan samenwerking met beoefenaars van andere wetenschappen. De laatste tijd is in die samenwerking aanzienlijke verbetering gekomen, zoals duidelijk wordt, wanneer men denkt aan de uitgebreide toepassing van statistische methoden op velerlei gebied. Ik moge hierbij opmerken, dat men in de Angelsaksische landen, en in het bijzonder in Amerika, ons land in dit opzicht ver vooruit is; ik behoef u slechts de namen te noemen van drie belangrijke tijdschriften, Econometrica, Biometrika en Psychometrika, welke tijdschriften vrij diepgaande artikelen bevatten over toepassingen van de wiskunde op de gebieden in kwestie. De achterstand te onzent wordt duidelijk hierdoor gedemonstreerd, dat van het laatstgenoemde tijdschrift, Psychometrika, inmiddels 13 jaargangen verschenen zijn, maar dat geen dezer jaargangen ook maar in één van de 43 openbare wetenschappelijke bibliotheken, waarvan de inhoud is opgenomen in de Centrale Catalogus, te vinden is.

Inmiddels zult U wellicht bij U zelf de vraag hebben gesteld: wat heeft dit verzamelen, ordenen en verwerken van kwantitatieve gegevens te maken met „helder denken”. En inderdaad, deze wijze van opvatten is dan ook wel fundamenteel verschillend van de veelal gegeven verklaring van het z.g.n. oefenen van het denken. Het is hier echter de bedoeling om duidelijk te maken, dat het mathematisch denken een fundamentele rol speelt o.a. wanneer men zich zelf en anderen een duidelijk beeld wil geven van de conclusies, waartoe een gevonden verzameling van kwantatieve gegevens bij nadere beschouwing leidt. Het rapport geeft geen voorbeelden ter toelichting van de bedoeling, maar laat ik er U een geven. Wanneer bij een intelligentie-onderzoek van een groep van 400 personen een gemiddeld intelligentiequotient van 102 wordt gevonden, kan men vragen naar het gemiddelde intelligentie-quotient van de groep van alle personen, waaruit die 400 kunnen worden beschouwd als op een volkomen toevallige manier te zijn gekozen. Gesteld men wil nagaan, of er bezwaar bestaat tegen de onderstelling, dat de gemiddelde intelligentie van dit z.g. universum 100 bedraagt. In dat geval werkt men met de „standaard-deviatie van het gemiddelde”, een getal, dat met grote benadering wordt gevonden door de standaarddeviatie van de gekozen groep te delen door $\sqrt{400}$. Iemand, die met deze methode vertrouwd is, kan dan onmiddellijk in getalwaarde de kans aangeven, dat de

gezochte gemiddelde intelligentie van het universum zich op een afstand van 2 eenheden bevindt van het gevonden bedrag 102, zoals dat met een gemiddelde van 100 het geval zou zijn. En nu komt de redenering in het rapport hier op neer, dat het in zo'n geval niet gaat om een formule, die de mathematicus kant en klaar aan de psycholoog aflevert zó, dat deze laatste er slechts bepaalde waarden voor de veranderlijken in behoeft te substitueren om tot een voor hem duidelijke uitkomst te geraken; neen, degene, die met deze en dergelijke methoden werkt, dient zelf een helder begrip te hebben van de redenering, die er aan ten grondslag ligt, anders is hij niet in staat zijn uitkomsten op de juiste manier te interpreteren.

Ik ontleende dit voorbeeld aan een hoofdstuk van de toegepaste wiskunde, waarvan de eerste beginselen nog niet op het programma van de middelbare school als leerstof voorkomen. Ik acht deze stof voor de school wel geschikt, alleen niet in een omvang, welke toestaat de oplossing van het hier besproken vraagstuk te begrijpen. De aard van mijn werkzaamheden brengt mij geregeld met deze stof in aanraking, en wanneer een student in de psychologie moeilijkheden heeft bij het toepassen van statistische methoden, blijken deze doorgaans niet voort te spruiten uit het niet kunnen hanteren van een of andere formule, maar uit het niet begrijpen van wat er aan zo'n formule vast zit. Het denken in wiskundige symbolen en volgens in de wiskunde gangbare methoden vormt in deze gevallen een onverbrekelijk geheel met het denken over de zaak zelf. In deze zin wordt dan ook in het rapport gesproken van de wiskunde als een hulpmiddel om helder te denken. Men noemt de wiskunde wel eens een hulpwetenschap, en in zekere zin is dat ook juist voor sommige onderdelen van deze wetenschap. Maar in een omvattender betekenis kunnen we zo'n onderdeel van de wiskunde beschouwen als een vertolking van datgene, wat zich om ons heen afspeelt; bij verschillende wetenschappen is het een in zo'n wetenschap geïntegreerd onderdeel van de wetenschap zelf. En in dit opzicht vertoont het rapport dan ook een belangrijke vooruitgang vergeleken bij vroegere uiteenzettingen omtrent de bedoeling van het oefenen in het denken, waarbij het werd voorgesteld, alsof het een training zou zijn van het menselijk denkvermogen, van het denken, zoals dat plaats grijpt op terreinen, die niet tot de wiskunde behoren, maar waarbij het denken dan zou profiteren van de oefening, die het op een of ander wiskundig gebied heeft ondergaan. Daarentegen wordt in dit rapport gesteld, dat het wiskundig denken ons niet in de eerste plaats leert, hoe wij moeten denken, maar dat het zelf tot het zuivere denken behoort, het zuivere denken niet

alleen binnen het gebied van de wiskunde, maar ook ver daarbuiten, op grond van de wiskundige symboliek.

Er wordt in het rapport evenwel ook gesproken over andere kanten van het denken en er wordt op gewezen, dat goed onderwijs in de wiskunde er toe dient te leiden, dat bij de leerling een critische houding wordt aangekweekt ten opzichte van redeneringen in de wiskunde en op buiten de wiskunde liggend terrein, dat hij bekend raakt met het onderscheid tussen redenering door middel van deductie en door middel van inductie, dat hij zal leren zich te bedienen van termen, waarvan de betekenis eenduidig vast staat, dat hij het onderscheid zal leren beseffen tussen premissen en conclusie. Bij alle waardering voor de helderheid, waarmee het rapport deze zaken uiteen zet, rijst hier de vraag of dit geen vrij magere resultaten zijn op het gebied van het aankweken van goede denkgewoonten. Het komt nog voor, dat hier nog andere en minstens even gewichtige dingen in het spel zijn, als bijv. het steeds weer teruggaan naar wat gegeven is, het tegelijkertijd uitgangspunt en doel in het oog houden, het doelmatig proberen van verschillende oplossingsmethoden, het zich scherp er van rekenschap geven wat een bepaalde definitie eigenlijk inhoudt, het leren overzien van een omvangrijke redenering en van een geheel van gegevens of eigenschappen, het aan de ene kant een eenmaal ingeslagen weg met volharding volgen maar aan de andere kant zich blijven openstellen voor andere en meer vruchtbare gedachten, het zich afvragen of er analoge gevallen vroeger zijn voorgekomen en of het onderhavige geval op een dergelijke manier zou kunnen worden behandeld. Ook dit zijn kanten van het denken, die door het beoefenen van de wiskunde kunnen worden ontwikkeld en ongetwijfeld bij het denken over niet-wiskundige problemen en bij het beoefenen van iedere wetenschap van belang zijn.

Wat betreft het doel van het wiskundeonderwijs om de leerlingen zekere vaardigheden te leren, in verhouding tot het andere doel om hun kennis bij te brengen van wiskundige dingen en eigenschappen en van begrippen als het functiebegrip, wordt het standpunt ingenomen, dat met name dit laatste ongetwijfeld van groot belang is voor burgers in een maatschappij, waar zoveel dingen in hun onderling verband dienen te worden gezien. Er wordt evenwel op gewezen, dat deze kant van het wiskundeonderwijs niet al te veel de nadruk mag hebben, dat er verschillende gebieden zijn, welke door dit functiebegrip niet worden beheerst en dat in het bijzonder het oefenen in het hanteren van de gewone techniek niet verwaarloosd mag worden; een opmerking, die ons overigens niet geheel vreemd in de oren klinkt.

Er wordt verder gewezen op de mogelijkheden, die het onderwijs in de wiskunde biedt, wanneer het er om gaat de leerlingen in verschillende opzichten een juiste instelling bij te brengen. De leerling ervaart hoe hoog de ideale eisen zijn, welke aan het beoefenen van sommige wetenschappen gesteld kunnen worden, en zal, naar wij hopen, in zijn latere theoretisch werk, ongeacht op welk gebied dat ligt, iets van deze ideale normen trachten te verwezenlijken. Hij leert zien, hoe men er in de wiskunde in slaagt om tot resultaten te komen, waarvan de juistheid boven elke verdenking vast staat en die met volkomen scherpte kunnen worden vastgesteld. Hij leert zelf nauwkeurig onderscheid maken tussen datgene, wat vast staat en datgene, wat nog niet vast staat. Hij ervaart aan den lijve het gevoel van zekerheid en het zelfvertrouwen, dat een logisch opgezette redenering biedt, welke geen schakel onbewezen laat passeren. Hij ziet zich een hoog ideaal gesteld wat betreft het afleveren van zijn werk, een ideaal van nauwkeurigheid, van volledigheid, van ordelijkheid, van netheid, dezelfde idealen, welke ieder goed vakman voor de geest staan. Onmiddellijk hiermee in verband staat het ideaal van volledig de zaken, waarmee men zich bezig houdt, te willen begrijpen. Geen enkel vak biedt in dezelfde mate als de wiskunde de gelegenheid om zich te vergewissen van de volledigheid van zijn inzicht, en de mogelijkheid om de plaats op te zoeken, waar het niet-begrijpen inzet. Verscheidene onderdelen van de wiskundeleerstof kunnen zo worden gedoceerd, dat ze ertoe bijdragen om bij de leerling de wenselijke gewoonte zich te doen vormen van zich steeds weer de vraag te stellen of zijn kennis volledig is en zijn inzicht vrij van ook maar de geringste troebelheid.

Maar wij willen er van afzien meer voorbeelden aan te halen van de gunstige instelling van de leerling tegenover zijn taak en zijn omgeving, voorbeelden van eigenschappen, waarvan het plausibel klinkt, wanneer men zegt, dat ze door beoefening van de wiskunde worden aangekweekt. De vraag lijkt me trouwens niet geheel ongerechtvaardigd of er, bij enig zoeken, ook niet een enkele ongunstige habitus zou zijn te vinden, die door de beoefening van die zelfde wiskunde wordt bevorderd. Hierover heeft zich echter, bij mijn weten, geen enkel rapport of schrijver over de didactiek van de wiskunde uitgelaten. Het lijkt me dan ook een hachelijke onderneming om de wenselijkheid van onderwijs in wiskunde aannemelijk te willen maken op laatstgenoemde gronden; ik geloof niet, dat we daarmee iemand zullen kunnen overtuigen, die niet van te voren om andere redenen inziet, dat de wiskunde terecht een voorname plaats inneemt op de programma's van onze middelbare scholen.

Wanneer het er nu om gaat vast te stellen, in de eerste plaats, welke onderdelen van de wiskunde op onze middelbare school programma's thuis horen, in de tweede plaats hoever we binnen ieder van die onderdelen afzonderlijk zullen gaan, dan kunnen wij, naar mijn mening, niet beter doen dan ons afvragen, welke delen van de wiskunde de grondslag vormen voor de toepassingen, die een aanzienlijk deel van de leerlingen later zal tegenkomen of voor verdere studie zal nodig hebben. Daarbij dient de abiturient van een middelbare school niet alleen een zekere techniek en een zekere feitenkennis op wiskundig gebied te bezitten, maar hij moet inzicht hebben opgedaan in de werkwijze van de mathematicus, in de opbouw van een wiskundig systeem, in de manier, waarop men een wiskundig onderwerp dient te bestuderen en waarop men een probleem met succes wiskundig aanpakt. Er rijzen dan twee vragen; ten eerste, in hoeverre neemt elk der vakken, die als onderdeel van de wiskunde worden gedoceerd, rechtmatig zijn plaats in op de lesrooster; ten tweede, zijn er wellicht onderdelen van de wiskunde welke voor een plaats op de lesrooster in aanmerking komen, maar die tot nu toe daarvan werden geweerd. Ik denk bij de eerste vraag aan de vele tijd, die op de hogere burgerschool wordt besteed aan het vak beschrijvende meetkunde; bij de tweede vraag aan een mogelijke behandeling van enkele elementaire statistische begrippen, welke in zo talloze toepassingen een rol spelen.

Ik zei in het begin van mijn inleiding, dat ik niet zou trachten een antwoord te geven op de vraag, wat naar mijn mening nu precies aan leerstof op de middelbare school thuis hoort, en dat ik slechts wilde wijzen op enige kwesties, die men vooraf onder het oog zal moeten zien, wil men tot een verantwoord programma komen. Enkele vragen van de eerste der twee catagorieën, welke ik daarbij noemde, vragen nl. welke betrekking hebben op de doelmatigheid van ons onderwijs in de wiskunde, hebben we thans besproken en wij gaan nu over tot die van de tweede groep, tot vragen, welke betrekking hebben op de redelijkheid van onze eisen. Wij willen daarbij denken aan eisen, die we stellen aan een leerling, waarvan we geneigd zijn te zeggen, dat het er een is van een middelmatig soort, aan de ene kant niet immuun voor wiskunde-onderwijs, aan de andere kant ook niet een uitblinker. Het is natuurlijk ondoenlijk om dit type met voldoende scherpte te definiëren; maar ieder van U heeft wel een zekere voorstelling van zo'n leerling, die met behoorlijk aanpakken de middelbare school wiskunde kan verwerken, wanneer er geen te zware eisen worden gesteld. U bemerkt vermoedelijk reeds

de moeilijkheid, waarvoor wij ons gesteld zien wanneer wij spreken van „redelijke eisen"; wij moeten dan eerst zeggen aan wat voor leerlingen wij die eisen willen stellen, maar wanneer wij de kenmerken van die leerlingen willen aangeven, bedienen wij ons onwillekeurig weer van het begrip: redelijke eis. Een redelijke eis is een eis, die we mogen stellen aan een middelmatige leerling, waarbij we onder een middelmatige leerling één verstaan, die voldoet aan redelijke eisen. Maar we zitten nu eenmaal in het schuitje met wat ieder van ons dan voor zich zelf moge noemen: middelmatige leerlingen, en we moeten met dit schuitje en zijn inhoud van wal steken. Dat willen we dan nu nog in gedachten doen en we zullen enkele problemen aansnijden, die bij de beoordeling van de redelijkheid van onze eisen een rol spelen.

Hoe komen wij er achter, of de behandeling van zeker onderwerp in een bepaalde klas en op een zeker moment tijdens de ontwikkeling van de leerstof, met succes kan plaats vinden? Laten we, om een concreet geval te hebben, denken aan het zoeken naar een antwoord op de vraag: in welk stadium van de leergang kan een behandeling van het begrip „gesloten systeem van stellingen" met gunstig resultaat worden ondernomen? In een bont gezelschap als dat van deze conferentie, waarin zelfs de psychiater zich interesseert voor onderwijs in de wiskunde, kan het wellicht geen kwaad even te zeggen, wat met een gesloten systeem wordt bedoeld. Het is een aantal stellingen, waarvan de ondersteld̲en elkaar aanvullen en de gestelden elkaar uitsluiten. In het geval van drie stellingen kunnen wij ze de gedaante geven: $p_1 \rightarrow q_1$, $p_2 \rightarrow q_2$, $p_3 \rightarrow q_3$. We weten dan, dat p_1 of p_2 of p_3 geldt, en dat uit het waar zijn van q_1 volgt, dat q_2 niet waar is; uit het waar zijn van q_2 volgt, dat q_3 niet waar is; uit het waar zijn van q_3 volgt, dat q_1 niet waar is. Op school zeggen wij dat laatste in de regel liever wat anders: uit het waar zijn van q_1 volgt, dat q_2 en q_3 niet waar zijn, enz. De belangrijke eigenschap van zo'n gesloten systeem is nu deze, dat wanneer wij de drie eigenschappen in kwestie hebben bewezen, wij gerechtigd zijn de corresponderende omgekeerden eveneens als bewezen te beschouwen. U kent de plaatsen in de schoolwiskunde, waar zich de gelegenheid voordoet om deze eigenschap van een gesloten systeem toe te passen; het minimum aantal stellingen, dat in zo'n gesloten systeem wordt opgenomen, is drie, het maximum meestal vijf; dit laatste nl. bij de onderlinge ligging van twee cirkels. Onze vraag was dus: wanneer kunnen we succes verwachten van een bespreking van deze zaak. Het enige middel om op die vraag een bruikbaar antwoord te krijgen is: op grond van tot nu toe opgedane ervaringen

de plaats in de leergang te bepalen, waarvan men vermoedt dat ze de meest geschikte is voor de behandeling, die behandeling vervolgens in het bewuste leerjaar op het bedoelde moment proberen, en dan zien, wat het resultaat is. Alleen, daarmee zijn we er niet. Want vooreerst dit: het is niet zo bijzonder belangrijk, dat een leraar dit voor zich zelf nu eens op zijn gemak gaat onderzoeken, al of niet tot een bevredigend resultaat komt, om dan in het vervolg daarnaar te handelen; immers, daar heeft de rest van de wiskundeleraren niets aan. En bovendien, wat ik mij voorstel, wanneer ik denk aan de toekomstige, voor zijn handwerk goed opgeleide leraar, is niet het beeld van iemand, die dergelijke gevallen, welke zich in de klas al duizenden malen hebben voorgedaan, nog moet onderzoeken; hij dient van de resultaten van zulke onderzoekingen op de hoogte te zijn voor hij leraar wordt. Een resultaat, waaraan de wiskundige onderwijswereld in zijn geheel wat heeft, wordt verkregen, wanneer een dergelijk onderzoek geschiedt door een groep leraren, die zich over de organisatie daarvan met elkaar hebben verstaan, die hun lessen en hun wijzé van onderzoeken van het resultaat van die lessen van te voren dus goed hebben doordacht, met elkaar overlegd, daaromtrent een afspraak hebben gemaakt en zich zo nauwkeurig mogelijk aan die afspraak houden; om dan ten slotte mededeling te doen van de verkregen resultaten, en indien deze onbevredigend blijken uit te vallen de proef eventueel over te doen in een ander stadium van onderwijs. Dat dit niet zonder een goede organisatie van de hieraan verbonden werkzaamheden kan geschieden, is zonder meer duidelijk. Tot die organisatie zal behoren, dat een groep van competente leraren wordt uitgezocht, die zich voor de zaak interesseren; dat erop wordt gelet, dat de verschillende klassen, waarin het onderzoek wordt verricht, een vergelijkbare voorgeschiedenis hebben en bovendien niet te ver uiteenlopen wat intellectuele capaciteiten betreft; dat de criteria, welke moeten dienen om het resultaat van de lessen te toetsen, zo worden gekozen, dat er geen gevaar bestaat zich te laten misleiden door schijnresultaten.

Het vinden van geschikte criteria is in vele gevallen een uitermate précair werk, zoals U onmiddellijk zal blijken, wanneer U daarnaar zoekt in het hier gekozen voorbeeld van een gesloten systeem. Bij de behandeling daarvan werkt men nl. niet onmiddellijk met de symbolen p, $\rightarrow$, q, maar men kiest een drietal bepaalde eigenschappen. Wanneer men nu wil onderzoeken, of een leerling de kern van de zaak heeft begrepen, zal men er wellicht toe komen hem een dergelijke redenering te doen houden voor een systeem uit

een ander stofgebied van de meetkunde of van de wiskunde in het algemeen. Dit bergt al gauw moeilijkheden voor de leerling, welke niet aan de zaak zelf, maar aan die andere stof inhaerent zijn, en dus de toetsing van het al of niet begrepen hebben waardeloos kunnen maken. Ten aanzien van de voorgeschiedenis van de proefklassen dient er in het bijzonder voor te worden gezorgd, dat elk dezer klassen de stof, waarvan bekendheid wordt verondersteld bij de behandeling van het onderwerp in kwestie, zo volledig mogelijk beheerst. Ook dit moet door van te voren zorgvuldig en in onderling overleg vastgestelde vragen worden onderzocht. En wat betreft het niet te ver uiteenlopen van het gemiddelde intellectuele peil van de verschillende klassen, hieromtrent zou men zich kunnen laten leiden door het oordeel van de scholen, zoals dat tot uitdrukking komt in de rapportcijfers, en, indien het gewenst lijkt, deze gegevens aanvullen met een groepsintelligentietest.

Er is onmiddellijk een aantal onderwerpen uit de gangbare schoolwiskunde aan te wijzen, welke op deze of een dergelijke manier zouden kunnen worden behandeld en voor een dergelijke behandeling aanleiding geven. Een onderwerp, dat met het bovengenoemde in nauw verband staat, is het omkeren van één stelling en de kwestie van het noodzakelijk of voldoende zijn van een voorwaarde; dit laatste doet zich o.a. voor bij de behandeling van meetkundige plaatsen. Het verband tussen het omkeren van een stelling en een gesloten systeem blijkt het duidelijkst, wanneer wij het geval beschouwen van een tweeledig gesloten systeem. Dit bestaat uit de eigenschap $p \rightarrow q$ en de contraire eigenschap non $p \rightarrow$ non q. Als men in dit speciale geval de twee omgekeerde stellingen wil bewijzen, heeft men de eigenschap van het gesloten systeem niet eens nodig; men kan hier eenvoudig het aequivalent zijn van een stelling met haar logische omkering gebruiken. — Dit punt noemde ik, omdat het aanstonds nog even ter sprake komt.

Een vraagpunt van andere aard betreft het volgende. Er zijn enkele onderwerpen in de schoolwiskunde, waaromtrent niet iedere leraar de vaste overtuiging bezit, dat een behandeling in het algemeen tot waardevolle resultaten leidt. Van die soort zijn er, welke een uitgebreid gebied beslaan, zoals bijv. de inleidende behandeling van de differentiaal- en integraalrekening; er zijn er ook, die slechts op speciale kwesties betrekking hebben. Een onzekerheid van de laatstgenoemde soort hebben we bij het bekende vraagstuk uit de algebra om een vierkantsvergelijking op te stellen, waarvan beide wortels in een zelfde gegeven relatie staan tot de corresponderende wortels van een gegeven vierkantsvergelijking, bijv. tweemaal zo

groot zijn. Alle, mij bekende, algebra-schoolboeken lossen dit vraagstuk eendrachtiglijk op precies twee manieren op. De eerste manier is die, waarbij men gebruik maakt van de eenvoudigste symmetrische functies van de wortels, uitgedrukt in de coëfficienten. U gelieve op te merken, dat ik niet zeg: dit is de ene manier, maar: dit is de eerste manier. Kijkt U maar in de schoolboeken. Maar dan leren de kinderen in al deze boeken ook nog een „tweede" manier (men verbaast zich soms over de meer dan gewone eensgezindheid van de verschillende schrijvers van schoolboeken: de moeilijkheid hierbij is, dat men van leraren niet mag veronderstellen, dat zij zouden afkijken). Welnu, bij deze tweede manier wordt aan de klas de vergelijking voorgelegd, welke ontstaat, wanneer men in de gegeven vergelijking x vervangt door $\frac{1}{2}y$. Vervolgens wordt eerst $\frac{1}{2}y$ en daarna y als onbekende beschouwd. Het resultaat is, dat in volgende vraagstukken van dit soort de leerlingen eerst de nieuwe onbekende y schrijven als een functie van x, deze betrekking oplossen naar x, en de gevonden uitdrukking in de gegeven vergelijking voor x substitueren. Vraagt men na een of twee lessen naar de grond, waarop deze simpele en daardoor zo geliefde manipulatie berust, dan weten ze dat niet meer. Toch moet dit laatste, dit blijvend begrijpen van de methode, naar het mij voorkomt, wel de bedoeling zijn van de behandeling van vraagstukken als dit op de „tweede" manier. Immers, het vraagstuk op zich zelf is verder van geen belang, het gaat hier dus, naar wij moeten aannemen, om het inzicht in de methode.

Nu berust hetgeen ik hier opmerkte slechts op een ervaring van mij zelf, een ervaring, die misschien door sommigen wordt gedeeld, door anderen niet. Degenen, die tot de laatste groep behoren en die dus kunnen bogen op goede resultaten hierbij, zullen dan wellicht wat wantrouwig kijken naar hun collega's van de eerste groep met hun minder fraai resultaat. Al naar hun geaardheid zullen ze geneigd zijn te zeggen: dan zijn jullie leerlingen niet geschikt, of: dan zijn jullie zelf niet geschikt. Een enquête over deze zaak zou waarschijnlijk reeds enig licht kunnen doen schijnen, alhoewel we met een collectie meningen hieromtrent enigszins voorzichtig zouden dienen te zijn, en zeker geen beslissing bij meerderheid van stemmen zouden mogen nemen; zolang er één leraar is, die op goede gronden kan beweren, dat hij hier een gunstig resultaat bereikt, dient te worden nagegaan of zijn methode van behandelen voor anderen bruikbaar is. Ook bij vraagpunten van deze soort zou een onderzoek als boven beschreven dienen te worden uitgevoerd.

Een vraag van een andere soort is: hoe staat het met de rijpheid

van kinderen van verschillende leeftijden voor het behandelen van grafische voorstellingen; kan men hiermee met succes beginnen in de eerste klas, is de tweede beter geschikt of is het nog beter te wachten tot de derde? Talloos zijn de ervaringen, op dit punt opgedaan door leraren aan Nederlandse middelbare scholen; maar even talloos zijn de ervaringen, welke de leraren met zich in het graf hebben meegenomen. Waar ik althans iets zou kunnen vinden op het gebied van mededelingen aangaande deze ervaringen, is mij niet bekend.

Bij het bespreken van enkele zaken, die ten grondslag liggen aan een rationale keuze van de leerstof, koos ik enkele voorbeelden. Het eerste had betrekking op het zoeken van de plaats in de middelbare schooltijd waar een bepaald, speciaal onderwerp, in dit geval een gesloten systeem van stellingen, het best aan de orde kan komen. Het tweede ging over het onderzoek naar wat een leerling begrijpt van een bepaalde behandelingswijze van een zeker vraagstuk, dat op een vastgestelde plaats in het programma aan de orde komt. Het derde voorbeeld, dat van het begin van de grafische voorstellingen, stelde de vraag naar de rijpheid van de leerlingen in de verschillende klassen voor het maken van een begin met een uitgebreid en fundamenteel hoofdstuk van de algebra. Ten slotte zal ik nog één ander geval bespreken, dat ons kan leren, hoe voorzichtig we moeten blijven bij het beoordelen van de resultaten van het behandelen van een zeker stuk leerstof, ook al zijn we bij de keuze van die leerstof uiterst omzichtig te werk gegaan.

Bij mijn onderwijs in de meetkunde in de eerste klas gebruikte ik gedurende enige jaren bij wijze van propaedeuse een voor de leerlingen zeer eenvoudig boekje, dat bedoeld is als een voorlopige behandeling van een deel van de vlakke meetkunde [1]); door het toepassen van allerlei bezuinigingen op de leerstof wordt het mogelijk gemaakt, dat de leerling al spoedig toe is aan de vierhoeken. Een van die bezuinigingen bestaat hierin, dat bij de behandeling van de evenwijdigheid van lijnen alleen de noodzakelijkheid van de bekende voorwaarden voor evenwijdigheid aan de orde komt, maar dat de eigenschappen, die betrekking hebben op het voldoende zijn van die voorwaarden, worden uitgesteld tot een tweede ronde. Een manier van behandelen, die dus precies tegengesteld is aan die van Euclides. De voordelen, welke zo'n opzet biedt, zijn duidelijk; het spreken over het omgekeerde van een stelling wordt nog wat

[1]) Meetkunde voor het eerste jaar, deel A, door A. H. C. van der Kruk; Zuid-Hollandse Uitg. Mij.; den Haag 1935.

uitgesteld, en verder zijn rechthoeken, ruiten en dergelijke figuren voor een leerling betrekkelijk eenvoudige dingen, de bewijzen van hun eigenschappen zijn kort, overzichtelijk en gemakkelijk te onthouden, en men kan een ruime keus doen uit vraagstukken, die de leerlingen geheel zelfstandig en dus met veel animo maken.

Nu komt er in een van deze paragrafen het volgende vraagstuk voor: in het trapezium ABCD is $\angle A = \angle D = 90°$, AD = DC en $\angle B = 45°$; bewijs dat AB = 2 DC. Als aanwijzing staat er bij: trek de hulplijn CE loodrecht op AB. Dit vraagstuk werd door een aantal leerlingen „gevonden", en wel op de volgende manier. De hoeken bij A en E zijn recht, dus zijn AD en EC evenwijdig; enz. Er werd dus gebruik gemaakt van een eigenschap, die nog niet behandeld was. Bij de bespreking van deze oplossing zag niemand uit zich zelf die redeneerfout. En nadat ik het niet goed zijn van deze redenering uitvoerig had uiteengezet, en er op had gewezen, dat de schrijver zich vermoedelijk had vergist en als aanwijzing had bedoeld: trek de hulplijn CE // DA, kwam één van de jongens (een van de besten van de klas) met de volgende oplossing: trek tòch CE $\perp$ AB; in de vierhoek AECD zijn nu drie rechte hoeken, dus is ook de vierde recht. De vierhoek is dus een rechthoek, enz. Natuurlijk zit de fout hier op dezelfde plaats als eerst, maar ik geef het U te doen om een klas van springlevende jongens en meisjes ervan te overtuigen, dat een vierhoek met niet minder dan 4 rechte hoeken niet noodzakelijk een rechthoek is! (dat het oorspronkelijke vraagstuk niet geheel onmogelijk is met de daarbij gegeven aanwijzing, blijkt wanneer men bovendien de hulplijn AC trekt; ik neem echter aan, dat deze oplossing hier niet werd bedoeld). Het hele effect van de zo uiterst omzichtig opgezette partiële behandeling van de evenwijdigheid van lijnen is: dat de leerlingen zich van het partiële in die behandeling niets aantrekken en eenvoudig de ontbrekende stellingen onbewust toevoegen; voorzover ze tenminste hun redeneringen al door middel van bekende eigenschappen opbouwen en zich niet geheel door hun aanschouwing laten leiden.

Bovendien merkte ik op, dat men uiterst zelden gepubliceerde mededelingen tegenkomt aangaande de ondervindingen, welke men bij de behandeling van een of ander deel van de leerstof in de klas heeft opgedaan. Het maakt soms wel de indruk, alsof men angstvallig zulke ervaringen voor zich zelf houdt, vooral wanneer ze minder gunstig zijn; zou hier ook zo iets in het spel kunnen zijn als vrees voor het geschreeuw der Beotiërs? Uitwisseling van ervaringen opgedaan bij het lesgeven of naar aanleiding van het

lesgeven is dringend gewenst, zij kan een stimulans zijn voor de een, een waarschuwing inhouden voor de ander, maar in beide gevallen zal zij aan ons werk ten goede komen. Ervaringen in het groot en ervaringen in het klein, over een ruim gebied omvattende vragen als: in welke klas beginnen met grafische voorstellingen, en ook meer beperkte vragen als: in welke klas voor het eerst spreken over een gesloten systeem van stellingen. Daarbij valt steeds weer op, dat de leerstof niet is te scheiden van de methode; immers een gunstige of ongunstige ervaring met een stuk leerstof betekent alleen maar een ervaring met een bepaalde wijze van behandelen van die leerstof. Waarbij het bovendien kan voorkomen, dat een zekere manier van behandelen het goed doet in een bepaald geaarde klas of bij een bepaalde leraar, maar niet in een andere klas of bij een andere leraar; de bijzondere omstandigheden en de persoon van de leraar kunnen hierbij nooit geheel worden uitgeschakeld. Algemeen bruikbare gezichtspunten naar aanleiding van ervaringen in de klas en van resultaten met het onderwijs zijn er echter zeker te ontdekken. Dat geschiedt nu reeds, alleen op veel grover wijze en slechts zo nu en dan.

Uitwisseling van ervaringen kan door enquêtes over speciale onderwerpen worden bevorderd; ervaringen, welke op grond van teamwork worden verkregen, zijn van nog meer waarde. Beide zullen kunnen bijdragen tot een rationele keuze van de leerstof.

DISCUSSIE.

Dr Mooy (A'dam) opent de discussie met de opmerking, dat l.l. het op prijs stellen, als er onderwerpen uit de practische wiskunde ter sprake worden gebracht, en vraagt aan de inleider of er nog andere onderwerpen zijn, dan hij genoemd heeft, die hiervoor in aanmerking komen. Dr Bunt zet in zijn antwoord uiteen, dat de onderwerpen, die hij reeds noemde (statistische) niet als illustratie van practische toepassingen waren bedoeld, maar dat ze van groot belang zijn voor vele leerlingen, zodat een voorbereiding op de M.S. waardevol zou zijn. Overigens is hij van mening, dat er weinig practische toepassingen buiten de natuurkunde te geven zijn. In Amerika is dit gedeelte van de wiskunde meer in de M.S. dan bij ons.

Dr Turkstra (Hilversum) vraagt aan de inleider of de klassieke vier-deling van de waarde van het wiskunde-onderwijs nl.: 1°. de materiële waarde, 2°. de vormende waarde, 3°. de ethische waarde

(eerlijkheid, netheid, accuratesse), 4°. de cultuurhistorische waarde, verlaten is, zo ja of er dan een nieuwe indeling, een twee-deling, voor in de plaats gekomen is? Dr B. antwoordt hierop, dat hij de ethische waarde in twijfel trekt. In de wiskunde moet een gemaakte fout onmiddellijk worden toegestemd. Heeft dat nu tengevolge, dat de l.l. in andere gevallen ook eerlijk zullen zijn? Wie zal dat bewijzen? Dr B. meent, dat de moderne indeling neerkomt op: 1°. de materieële waarde (alles wat je aan materie geeft), 2°. de psychologische zijde (alles wat van invloed is op de geest van de l.l.). Cultuurhistorische en ethische vorming zijn niet te scheiden. Dr Turkstra vraagt ook nog aan de inleider, wat hij denkt over de „transfer". Denkt U, dat de wiskunde waarden heeft, die op andere gebieden tot uiting kunnen komen? Door Dr Mooy wordt de vraag gesteld, of die „transfer" ook opgaat, zonder er in de les de nadruk op te leggen. Dr B. is van mening, dat transfer zeker optreedt, maar niet, zonder steeds de nadruk te leggen op het feit, dat, wat je hier aan denktucht toepast, ook toegepast wordt op andere gebieden.

Dr Streefkerk (Hilversum) deelt mee, dat hij nu op een stokpaardje komt, dat hij als volgt zou willen formuleren. De wiskunde heeft vormende waarde, evenals witte bonen grote voedingswaarde hebben. Het is echter niet nodig, dat iedereen steeds witte bonen eet; is het nu wel nodig, dat elke l.l. van de M.S. van klasse 1 t/m klasse 5 of 6 wiskunde doet? De doeleinden zijn technisch-, wiskundig-, en doelmatig denken. Is voor die doeleinden de wiskunde noodzakelijk? Voor technisch denken zeker, voor wiskundig denken ook, voor logisch denken zeker niet. Voor doelmatig denken? Voor het bekijken van een probleem en zo mogelijk het oplossen er van? Is daar ook wiskunde voor nodig? Er zijn vele hoogleraren in ons land, die toch ongetwijfeld doelmatig kunnen denken maar die geen wiskunde kennen. Is het dan misschien een axioma, dat l.l. van de M.S. wiskunde moeten leren van de 1e tot en met de 6e klas? Moeten we niet meer differentiëren en alleen die richtingen wiskunde geven, die hiervoor geschikt zijn? Er zijn zoveel mensen, die een grondige afkeer hebben van wiskunde, dat we dit niet dadelijk mogen wijten aan het slechte onderwijs, wat ze zouden hebben ontvangen. Het is dus heel goed mogelijk, dat de wiskunde voor sommigen geen vormende waarde heeft.

De heer Janssen (Bussum) sluit hierbij aan, dat hij er van overtuigd is, dat dit probleem opgelost wordt bij het Individueel onderwijs. Dan komen er weliswaar weer andere moeilijkheden, maar in principe is dat de oplossing. Z.i. zijn er kinderen, voor

wie de resultaten niet evenredig zijn met de moeite, die er aan besteed is en die l.l. kunnen we beter verlossen van wiskunde.

Dr Wansink (Arnhem) maakt hierover nu de opmerking, dat inderdaad het wiskundeonderwijs nadelige gevolgen kan hebben, als het slecht gegeven wordt, maar ook als het goed gegeven wordt aan ongeschikte leerlingen heeft het nadelige gevolgen en veroorzaakt tijdverlies. Naast het probleem van de keuze van de leerstof is er dan ook een nieuw probleem: de keuze van de l.l., die we op de M.S. toelaten. Zijn er nl. l.l., die ongeschikt zijn voor M.O., toch op de M.S. dan hebben wij een slechte invloed op hen en zij op de klas. De ouders kiezen vaak de school uit; op volkomen ontoelaatbare gronden. We moeten ons bezinnen over de leerstof in verband met de maatschappelijke bestemming, en zodoende komen tot een differentiatie. Verder zou de heer W. willen verzoeken om bij de propaganda naar buiten, niet een stuk leerstof te kiezen uitsluitend op grond van de „transfer" en formele training. Daarmee kunnen we buitenstaanders niet overtuigen. De sociale waardering van de wiskunde speelt een grote rol, want nog steeds wordt over de wiskunde ook door niet-wiskundigen besloten. Laten we dus proberen die leerstof te kiezen, die te pas komt of te pas zal komen. In dit verband veroordeelde hij de leerstof van de wiskunde op de H.B.S. A en op de meisjes H.B.S. Hij pleitte voor een afschaffing van de meetkunde voor de H.B.S A l.l. en een invoering van de Differentiaal-rekening.

Dr Bunt zet in zijn antwoord uiteen, dat hij het eens is met de heer Wansink, dat de practische toepassingen op het eerste plan moeten staan. Het argument van de formele training is veel te vaag en niet steekhoudend. De inrichting van ons onderwijs geschiedt ook niet door leraren, maar door de maatschappij. Wat betreft de selectie, bepleit de heer B. de instelling van een brugklasse. Een verantwoorde selectie kan niet in één of twee dagen plaats vinden. De leraar zal moeten onderzoeken, hoe de l.l. op zijn lessen reageren, doch dit zal zeer zware eisen stellen aan de docent. De opleiding moet dan ook veranderen. Een zeer goede leraar zou in de brug-klasse moeten staan. Deze zal moeten weten, hoe hij met de l.l. moet omgaan; de gevoelige periode speelt hierbij een rol. Wanneer er heel voorzichtig les gegeven wordt, is er wel iets te zien, maar dat ligt niet kant en klaar voor ons; diepgaande studies en onderzoeken zijn hiervoor nodig. Dr B. zou ook gaarne willen zien, dat de brug-klasse niet gedoubleerd mag worden, doch in de eerste tijd zou hij die eis nog niet willen stellen. Wat het individuele onderwijs betreft, dit is in principe ideaal, zodat het zeer goed zou

zijn naast klassikaal meer individueel te werk te gaan. Dr B. is echter van mening, dat het niet mogelijk is 30 l.l. individueel te behandelen. Dit is voor de leraar psychisch te vermoeiend en organisatorisch onmogelijk. Wel kunnen we meer individueel werken, dan tot nog toe gedaan wordt. Hij bepleit ook een grotere differentiatie. De heer Reckendorf (Ommen) deelt mee, dat om in Engeland tot de Universiteit toegelaten te worden het niet noodzakelijk is wiskunde beoefend te hebben. Het is z.i. belangrijker de vakken voor de l.l. te selecteren, dan de l.l. te selecteren voor de M.S. Groepsonderwijs biedt grote moeilijkheden. In landen, waar grote scholen zijn, kan men wel gedaan krijgen, dat l.l. zitten blijven voor slechts één vak, op zijn eigen school (een kleine) lukt dit evenwel ook gedeeltelijk.

Prof. Freudenthal, de practijk van de Universiteit voor ogen hebbende, vertelt, dat het hem mogelijk is, groepjes, maximaal van 10 studenten, individueel te behandelen, maar acht dit geheel een kwestie van organisatie. Hij staat hier niet zo sceptisch tegenover. Dr Bunt licht nog toe, dat hij zich bij zijn inleiding, ter wille van een concreet uitgangspunt, de M.S. heeft voorgesteld, zoals deze thans is. Hij bepleit onderzoekingen op het gebied van het onderwijs. Op welke leeftijd zijn ze vatbaar voor een of ander onderwerp? We weten het niet, en moeten het collectief onderzoeken. De heer Van Bommel (Utrecht) acht het een zeer gevaarlijk experiment, dat deze onderzoekingen worden uitgevoerd in het klassikale systeem, als niet uitgemaakt is, dat dit het beste is. De heer B. meent echter, dat het alleen zin heeft om van een dergelijk onderzoek te spreken in de bestaande systemen.

De discussie over de inleiding van Dr Bunt wordt de volgende dag voortgezet.

Dr Van Tol (Breda) meent, dat na de 1-jarige proefklas het wel mogelijk is om met grote zekerheid te zeggen of een leerling geschikt is voor de 1e, 2e of 3e klas, maar voor de hogere klassen niet. Hij is nl. van mening, dat de l.l. van hogere klassen meer hun verstand gebruiken en van lagere klassen meer uit hun hoofd leren. In de 1e klas moeten de l.l. nog leren redeneren; het begin begrijpen ze niet, maar langzamerhand komen ze er in. Zo is het mogelijk om later de Stereometrie opnieuw op te zetten, omdat ze dan rijp zijn voor min of meer zelfstandig redeneren.

In zijn antwoord merkt Dr Bunt op, dat hij het niet geheel met hem eens is. Leerlingen in de hogere klassen gebruiken niet meer hun verstand dan in de lagere klassen, alleen op een ander terrein. Voor de l.l. van de 1e klas is een bewijs de aantoning van de juist-

heid van een eigenschap. Dat bewijzen slechts wil zeggen: terugbrengen tot vroegere eigenschappen of axioma's, is ook voor vele leerlingen van hogere klassen niet duidelijk. Dit inzicht breekt zeker niet vanzelf baan. Dr B. zegt, dat het b.v. mogelijk is als volgt te werk te gaan. Geef een breed fundament van axioma's. Laat de l.l. daarmee werken en ervaringen opdoen. Ze kunnen dan tot het inzicht komen, dat er eigenschappen zijn, die geformuleerd kunnen worden en die verband met elkaar houden. Zo komen ze vanzelf op een systeem. Later kan dan nagegaan worden, dat het aantal axioma's verminderd kan worden en men komt zo op een axiomastelsel. Het fundament kan zo efficient mogelijk gekozen worden met het oog op de latere ordening.

Uitvoerig wordt daarna gediscussieerd over in te stellen enquêtes. De enquête, die Dr B. onlangs gehouden heeft, diende slechts om een voorlopig overzicht te krijgen. Dr Bronkhorst (Eindhoven) juicht het idee van kleine enquêtes toe. De vindingrijkheid van onze l.l. is niet groot, zodat het zeer belangrijk is, te weten, welke eisen we aan hen kunnen stellen. Het zou aan hen en aan ons werk ten goede komen, als er maatstaven werden gevonden, waaraan onze l.l. moeten voldoen. Dr Bunt spreekt zijn vreugde erover uit, dat zovelen het idee van kleine enquêtes over verschillende onderwerpen toejuichen en hij bespreekt nog eens, hoe hij het zich had voorgesteld. Hij noemt hierbij twee soorten onderzoekingen. In de eerste worden vragen gesteld over de door de docent toegepaste methoden; de andere verlangt zijn medewerking om na te gaan, hoe de l.l. op een van te voren uitvoerig besproken behandelingswijze reageren. Als antwoord op een vraag van de heer Wansink, hoeveel tijd dit in de klas zou vergen, merkt Dr B. op, dat dit zeker geen verloren tijd is, want deze lessen zullen, in verband met de uitvoerige voorbereiding, van voortreffelijk gehalte zijn. Vele aanwezigen zijn bereid aan deze enquêtes en andere onderzoekingen mee te werken. Naar aanleiding van het door de inleider genoemde onderwerp: „het opstellen van een vierkantsvergelijking, waarvan beide wortels in een zelfde gegeven relatie staan tot de corresponderende wortels van een gegeven vierkantsvergelijking" merkt Dr Turkstra op dat hij toch beide methoden geeft, alhoewel hij toegeeft, dat de tweede methode niet of nauwelijks begrepen kan worden. Hij meent hier echter een onderwerp te hebben, waarbij hij de l.l. de ethische waarde van de wiskunde bewust kan maken. De tweede methode gaat verrassend eenvoudig, maar berust op het diepe en moeilijke begrip: wortel van een vergelijking en op het begrip

functie en inverse functie. Dr B. antwoordt hierop, dat hij nooit bindende voorschriften zou willen geven.

Ten slotte vraagt de heer Struik (Deventer) nog, in hoeverre het mogelijk is in de wiskunde, in het bijzonder bij de vlakke meetkunde, de l.l. systematisch duidelijk te maken, dat er een probleem is? Kan men iemand leren „open" te zijn? Dr B. antwoordt hierop, dat het voor velen zeer moeilijk is, om van een eenmaal ingeslagen weg terug te keren. Het blijkt, dat bij een volgend pogen, steeds weer op de manier van de eerste keer teruggekomen wordt.

Hierop wordt de discussie over de inleiding van Dr Bunt gesloten.

DE ALGEBRAISCHE EN DE ANALYTISCHE VISIE OP HET GETALBEGRIP IN DE ELEMENTAIRE WISKUNDE

door

Prof. Dr HANS FREUDENTHAL.

Het natuurlijke getal is voor de leerling van de Middelbare School geen probleem meer of — als U het zo wilt formuleren — nog geen probleem. Naar gelang of U zich plaatst op het standpunt van het lager rekenonderwijs dan wel op dat van de hogere wiskunde, kunt u de ene of de andere formulering prefereren. Reeds vanaf de 4e of 5e klas van de lagere school is voor het werken met de natuurlijke getallen geen begrip meer, maar alleen nog routine vereist. Zeer vroeg heeft het getalbegrip van de leerling ook al een zekere uitbreiding ondergaan, die in de ontwikkeling van de rekenkundige bekwaamheden der *mensheid* pas laat haar beslag heeft gekregen: de invoering van en het rekenen met de nul, een onmisbaar hulpmiddel bij het cijferen, zoals wij het tegenwoordig in ons positiestelsel kennen. Een andere uitbreiding van het getalbegrip hoort eveneens nog tot de taak van de lagere school — ik bedoel de aanvulling van de natuurlijke getallen met de positieve gebroken getallen.

Dat is dan een grondslag, waarop de middelbare school voortbouwt, zonder opnieuw in de fundamenten van het gebouw te wroeten, zoals de wiskundige doet of ziet doen, wanneer hij aan de universiteit zijn kennis verdiept. Hoe dieper hij doordringt, des te meer wordt hij in zijn bewegingsvrijheid belemmerd, en men mag wel zeggen, dat geen *uitbreiding* van het natuurlijk getalbegrip de wiskundige zoveel zorgen baart als het natuurlijk getalbegrip zelf. Dat $3 + 4 = 4 + 3$ is, aanvaardt de wiskundige even grif als het kind, voor wie de getallen hoeveelheden blokken of vingers zijn, maar dat $a + b = b + a$ is, is voor hem een wiskundige stelling, waarmee de algebra-leerling zonder aarzelen instemt, en die pas in een ver gevorderd stadium van abstractie erkend wordt als iets, dat voor een bewijs vatbaar is. Hiervoor is namelijk een geesteshouding vereist, die van de primitieve zeer verschilt: men moet hebben begrepen, dat het er niet alleen op aankomt, materieel nieuwe waarheden te ontdekken, en men moet hebben geleerd, problemen te zien en te zoeken, waar — oppervlakkig bekeken —

van geen problematiek sprake is. Het heeft dan ook lang geduurd, aleer de wiskundigen aan de rechtvaardiging der elementaire rekenwetten zijn begonnen. Lang heeft men deze wetten als axioma's aanvaard, dwz. als grondstellingen, die voor geen verdere discussie en ontleding vatbaar waren, en pas tegen het eind van de vorige eeuw is gebleken, dat deze rekenwetten als bewijsbare stellingen konden worden beschouwd van een theorie, die op veel eenvoudiger beginselen berustte. De strevingen, die ik bedoel, hebben zich in twee richtingen afgetekend; twee per slot van rekening equivalente opvattingen van het begrip natuurlijk getal zijn met al hun consequenties ontwikkeld: de ene, die in het natuurlijk getal in eerste instantie een *hoeveelheid* zag, een hoofdtelwoord, en de andere, die het primitieve proces van het *tellen* wiskundig nabootste, om tot het natuurlijk getal als rangtelwoord te geraken. Op die tweede weg is het leidende beginsel dat der volledige inductie, ook recursie (en in de Nederlandse literatuur soms Bernoulliaans principe) genaamd. Dit beginsel doet dienst, om het natuurlijk getal, alsmede de rekenoperaties en de rekenwetten voort te brengen. Het is niets anders dan de strengere formulering van die inductie, waarmee iedere paedagoog expliciet of impliciet werkt, wanneer hij zijn leerlingen wetmatigheden moet inprenten als verschijnsel en als norm.

$$1 \times 2 = 2$$
$$2 \times 2 = 4$$
$$3 \times 2 = 6$$
$$4 \times 2 = 8$$
enz.

dat is zo'n lijstje, dat hij zijn leerling laat opmaken, en hij staat hem bewust toe, de uitkomst van de volgende regel te berekenen door bij die van de voorafgaande telkens 2 op te tellen, totdat de leerling deze ezelsbrug kan missen, omdat hij de weg buiten het rijtje om kent. De wiskundige nu, die het niet versmaadt, over die tafel even na te denken, zal hier niet minachtend van een ezelsbrug spreken. Hij herkent veeleer in die tafel het definiërende beginsel van het vermenigvuldigings-procédé. Hij zelf doet immers niets anders, wanneer hij $n \times 2$ wil definiëren, dan wat de leerling van de lagere school verplicht is te doen. Hij stelt namelijk per definitie vast:

$$1 \times 2 = 2$$

en

$$(n + 1) \times 2 = (n \times 2) + 2,$$

en hiermee heeft hij ten eerste vastgelegd, wat 1×2 is, en hij

heeft voor elke n de definitie van $(n+1) \times 2$ herleid tot die van $n \times 2$. Volgens het beginsel der volledige inductie is dan voor alle n de waarde van $n \times 2$ vastgelegd. In wezen heeft hij echter niets anders gedaan, dan het kind, dat zijn tafels produceert; alleen dat, waarvoor het kind tien regels en dan nog het woordje „enz." nodig had, heeft hij met heel wat minder cijfers, letters en woorden kunnen zeggen, en aan een grotere beknoptheid heeft hij een grotere precisie en exactheid kunnen paren. Ook op een grotere algemeenheid kan hij bogen: wanneer het kind nieuwe lijstjes nodig heeft voor $n \times 3$, $n \times 4$ enz., dan doet de wiskundige alles met één slag, door te definiëren:

$$1 \times a = a$$
$$(n+1) \times a = n \times a + a.$$

Met het beginsel der volledige inductie heeft hij reeds de natuurlijke getallen voortgebracht; hij definieert optellen en vermenigvuldigen op deze wijze, en hij demonstreert opnieuw de kracht van dat beginsel, wanneer hij rekenwetten en andere stellingen bewijst. Dat

$$n \times 1 = n$$

is, gelooft ieder, die nog niet wiskundig bedorven is, zonder bezwaar, maar de wiskundige is er trots op, het te kunnen bewijzen. Hij zegt:

$$1 \times 1 = 1 \text{ (per definitie)}$$

en

$$(n+1) \times 1 = (n \times 1) + 1 \text{ (volgens definitie)}$$
$$= n + 1 \text{ (volgens inductieveronderstelling)},$$

en krachtens het beginsel der volledige inductie is hij dan klaar; hij heeft nu $n \times 1 = n$ voor alle n bewezen.

U zult vragen: „Wat hebben we aan deze subtiliteiten in het onderwijs?" En u kunt deze vraag uitbreiden, door alles wat u op de universiteit als voorbereiding tot „de klas" moet leren, en bloc te verwerpen. Ik ben er van overtuigd, dat deze geesteshouding onjuist is. Ik meen, dat alle didactische problemen alleen bevredigend kunnen worden opgelost, wanneer men het meest elementaire telkens weer doordenkt vanuit hoger standpunt (waarbij ik dan toegeef, dat dit hoger standpunt niet altijd het wiskundige, maar vaak ook het paedagogisch-psychologische is). Ik wil het met een voorbeeld uit mijn eigen praktijk toelichten. Die praktijk is dan niet „de klas", maar mijn eigen studeerkamer, waar op de deur wordt geklopt door iemand, die „er weer niets van snapt" — ik

bedoel niet een student, want studenten zijn aan dergelijke familiariteiten nog niet toe en wachten liever het tentamen af, om te demonstreren, dat ze het niet gesnapt hebben.

Het proefkonijn nu is een van mijn zoontjes, die zijn eerste schreden in de algebra moet doen, en deze schreden leiden volgens geijkte methoden naar de negatieve kant van onze getallenrij, of wanneer wij het concreter willen formuleren, naar de streek beneden het vriespunt van de thermometer-schaal, of in de contreien van vermogens en schulden waarin hij zich op de lagere school al als een volleerde bankier of makelaar in onroerende goederen heeft bewogen. Er zijn nog veel meer kunstgrepen, om de algebra-leerling bij te brengen, dat $5 - 7 = -2$ is, en soms heb ik de indruk, dat op dit punt van het goede ook wel teveel kan worden gedaan. Mijn ervaring heeft mij geleerd, dat sommen als $5 - 7 = -2$ al door veel jongere kinderen volkomen kunnen worden begrepen, want ze behelzen zeer aanschouwelijke feiten. De werkelijke moeilijkheden beginnen pas bij sommen van het type $5 - (-3) = 8$, en wanneer wij veel moeite doen, om de leerling te doen begrijpen, dat $5 - 7 = -2$ is, dan kan ik niet inzien, waarom wij $5 - (-3) = 8$ moeten afdoen met het regeltje van „min–min is plus". Ik zelf zie het niet in, en sommige leerlingen vermoedelijk ook niet, want je vindt stellig in elke klas van die lastpakken, die met die regeltjes geen genoegen nemen en beslist willen weten, waarom dit zo is. En om nu weer op een van mijn jongens terug te komen — die zat een hele middag te tobben over die sommetjes, en ofschoon hij de knepen van „plus–min is min" en „min–plus is min" en „min–min is plus" beheerste, kwam hij mij telkens weer lastig vallen met het verhaal, dat hij er niets van had begrepen. Voor mij zelf was het geval nog lastiger, want ik wist wel, hoe ik $5 - 7$ met de thermometer-schaal of met de vermogens-balans kon uitleggen, maar hoe ik „kou" moest *aftrekken* en hoe ik zonder mijn tong te breken over negatieve schulden, $5 - (-3)$ moest bewerken, wist ik niet.

Gelukkig bleef mijn zoontje volharden en dwong mij na te denken. En toen liet ik hem een tafel opmaken, die hem aan zijn eerste jaren lagere school moest doen denken, nl.

$$5 - 2 = 3$$
$$5 - 1 = 4$$
$$5 - 0 = 5$$
$$5 - (-1) = 6$$
$$5 - (-2) = 7$$
$$5 - (-3) = 8.$$

Het middel was afdoende.

Maar waartoe ik u dit verhaal verteld heb? Eenvoudig omdat de paedagoog, die erin optreedt, iemand is, die wanneer hij iets aan wiskunde doet, meestal denkt in de termen van de meest abstracte hogere wiskunde, en die wanneer hij met gehele getallen heeft te maken, tegen wil en dank in het vaarwater van de volledige inductie terechtkomt. Toen hij gedwongen was, even na te denken, heeft hij onbewust een streng mathematisch bewijs voor $a - (-b) = a + b$ geconstrueerd, en hij heeft dit bewijs vervolgens getransformeerd in de taal en sfeer van het eerste algebra-onderwijs, en wel zonder dat hij meer dan strict nodig prijsgaf van de exactheid der hogere wiskunde. Het enige, wat hij deed, was de strengere volledige inductie door de didactische inductie te vervangen.

Ik geloof, dat dit een algemeen vruchtbaar paedagogisch beginsel is. De volledige inductie is een inkleding in streng geformaliseerde taal van de naieve inductie, die niet slechter hoeft te zijn dan haar grote zuster. En zo — komt het mij voor — is het overal in de schoolwiskunde. Haar bewijzen moeten in de taalkundige formulering slordiger zijn dan die der hogere wiskunde — in wezen hoeven ze er niet van te verschillen. Alleen zijn er zeer veel nuances van exactheid — niet alleen het verschil tussen elementaire en hogere wiskunde, maar nuances in het schoolonderwijs zelf, waarvan men zich bewust moet bedienen, om de grotere exactheid in concentrische kringen te benaderen, tot de exactheid der hogere wiskunde toe, die er als het ware de apotheose van is. Het doel van elk bewijs is helderheid van inzicht in een structuur, en de verscherping van exactheids-eisen mag enkel het gevolg zijn van het doorzien van problemen, die die helderheid hebben vertroebeld.

Onze gehele hogere wiskunde ligt in het verlengde van elementaire werkwijzen. We moeten nu niet de historische ontwikkeling klakkeloos in onze didactiek overnemen, maar de lijn vanuit de hogere wiskunde weer terugverlengen, om de juiste didactische methoden te vinden. Om te laten zien, dat dit de goede weg is, zou ik de hele schoolwiskunde onder het mes moeten nemen, maar dit kan mijn taak niet zijn. Ik wil bij enkele stadia van de ontwikkeling van het getalbegrip blijven staan.

Het gebroken getal sla ik over. Hiermee is de leerling al op de lagere school bekend geworden — het spijt mij, dat ik het moet zeggen — de didactiek van het lager onderwijs wint het in veel opzichten van die van het middelbaar onderwijs. Laten we ons tot de algebra beperken! In het algebra-onderwijs volgen op de negatieve getallen de reële en ten slotte de complexe.

Wat zijn reële getallen -- niet abstract wiskundig, maar in de

praktijk van het onderwijs? De leerling komt met twee typen in aanraking: de worteluitdrukkingen, zoals $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$ enz., en uitdrukkingen, zoals log 2, π, cos 10^0. Aan deze twee typen beantwoorden twee, ook in het onderwijs aanwezige visies van de uitbreiding van het getalbegrip. U weet, dat $\sqrt{2}$ enz. algebraische irrationaliteiten worden genoemd, en π, log 2 enz. transcendent. Het eerste soort voldoet namelijk aan zogenaamde algebraische vergelijkingen, dwz. vergelijkingen $a_0x^n + \ldots + a_n = 0$ met gehele coëfficiënten, terwijl de getallen van het tweede soort niet op deze wijze kunnen worden verkregen. Maar hiermee is nog niet het laatste woord gesproken, want onder de algebraische vergelijkingen zijn er ook, die niet reëel oplosbaar zijn, zoals $x^2 + 1 = 0$, die dus een nieuwe uitbreiding van het getalbegrip vereisen. Aan de andere kant moet men voor de reële getallen ook een gemeenschappelijk voortbrengingsbeginsel beramen, en de vraag ontstaat, hoe men zich op school van deze taak kwijt.

Dat $\sqrt{2}$ een getal is met evenveel bestaansrecht als $\frac{5}{7}$ is voor de leerling geen probleem; $\sqrt{2}$ is immers de diagonaal van een vierkant met zijde 1. In dit meetkundig verband krijgt $\sqrt{2}$ een tastbare realiteit, waarvan zijn ingewikkeldere collega's zoals $\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$ mede profiteren. Deze realiteit wordt nog verhoogd, als we $\sqrt{2}$ werkelijk gaan berekenen, hetzij met gebruikelijke methoden van worteltrekken, hetzij met historisch nog meer eerbiedwaardige methoden, zoals reeds de Babyloniers kenden. Ik bedoel de volgende redenering: $\sqrt{2}$ ontstaat ook als zijde van een vierkant, dat gelijk is aan de rechthoek 1 bij 2. Nu is 1 voor die zijde zeker te weinig en 2 zeker te veel; het gemiddelde $\frac{3}{2}$ is een behoorlijke approximatie: $(\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$. Maar bij een zijde $\frac{3}{2}$ hoort als andere zijde $2 : \frac{3}{2}$, wanneer de oppervlakte 2 moet zijn; we moeten dus nu een rechthoek van $\frac{3}{2}$ bij $\frac{4}{3}$ in een even groot vierkant vervormen, en we nemen weer het gemiddelde van de zijden, dus $\frac{17}{12}$, als nieuwe zijde. Dat is een goede approximatie: $(\frac{17}{12})^2 = \frac{289}{144} = 2\frac{1}{144}$. Zo kunnen we doorgaan, om steeds maar betere benaderingen voor $\sqrt{2}$ te verkrijgen.

Convergeert deze rij? We kunnen het met wiskundige methoden gemakkelijk bevestigend beantwoorden, maar als we nog niets afweten van reële getallen, moeten we eerst de zin van deze vraag ontleden, dwz. we moeten het geloof in het bestaan van $\sqrt{2}$ eerst ondermijnen, voor we het kunnen bevestigen. De behoefte hieraan doet zich op school nauwelijks voor. Vooral wanneer we de leerling de wortel uit 2 laten trekken, zoals hij met wortels had gedaan,

die opgingen, zal er zelfs onder de pientersten geen zijn, die protesteert. Dat niet elke som hoeft op te gaan, is een feit, waarmee zij al op de lagere school vertrouwd zijn geraakt. Wel kan men erop wijzen, dat de decimaalbreukontwikkeling van $\sqrt{2}$ niet periodiek is, en wanneer men hieraan nog het bewijs voor de irrationaliteit zou toevoegen, dan zou men beslist geen ongepaste eisen aan de denkvermogens der leerlingen stellen, en men zou ze aan de andere kant bekend maken met een der belangrijkste ontdekkingen, die wij aan de Grieken hebben te danken.

Om op de reële getallen terug te komen: ik zie er niet het minste bezwaar in, om die — zoals het inderdaad gebruikelijk is — in te voeren als oneindige decimaalbreuken, waarmee men geheel naief rekent, d.w.z. door de rekenwetten voor eindige decimaalbreuken werktuiglijk toe te passen. De snede van Dedekind hoort niet in het middelbaar onderwijs en ook niet in de hiervoor bestemde leerboeken thuis — voor mijn gevoel trouwens ook niet in de universitaire leerboeken der analyse, althans niet als *grondslag* van de theorie der reële getallen. De snede van Dedekind is een gezochte en gekunstelde methode, die aanvankelijk elegant lijkt, maar zeer omslachtige en onelegante bewijzen vereist, wanneer men de theorie der reële getallen hierop wil baseren; bovendien maakt de snede van Dedekind geheel onnodig gebruik van de orderelaties der rationale getallen, door deze volgens hun grootte in twee klassen te verdelen, en verdoezelt hierdoor het meest essentiële in het proces van voortbrenging der reële getallen. Veel bevredigender is voor het universitair onderwijs een methode, die rechtstreeks aanknoopt aan de primitieve voorstelling van een reëel getal als een oneindige decimaalbreuk, iets waarmee de leerling der middelbare school volkomen vertrouwd is.

Dat het rekenen met oneindige decimaalbreuken volkomen verantwoord is, ook als men niets van sneden van Dedekind en dergelijke hogere abstracties afweet, wil ik u toch even laten zien. Wanneer men twee decimale breuken

$$a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$$
$$b_0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$$

bij elkaar moet optellen, dan geschiedt dat volgens de methode van het cijferen, door telkens $a_n + b_n$ te vormen en de tientallen naar links over te brengen. Nu kan men hiermee natuurlijk niet in het oneindige beginnen, maar dit hoeft ook niet. Verwaarloost men even de cijfers, die op a_n en b_n volgen, dan kan men die overblijvende eindige breuken vast provisorisch optellen; houdt men daarna met

a_{n+1} en b_{n+1} rekening, dan kan men achteraf weliswaar genoodzaakt zijn, de verkregen uitkomst te corrigeren, maar die correctie kan nooit 2 eenheden van de n-de plaats te boven gaan; op hoogstens deze fout na was de provisorische som dus al nauwkeurig. Kiest men n groot genoeg, dan kan men met elke gewenste nauwkeurigheid de som van de twee gegeven getallen berekenen. Vindt u dit onbevredigend, dan eist u meer dan u redelijkerwijs mag. De uitkomst, zoals ik die heb geschetst, beantwoordt volstrekt aan de gegevens. Een oneindige decimale breuk is immers ook een reëel getal, dat slechts bij benadering bekend is, zij het dan met elke benadering, die u ooit kunt eisen. Beter dan deze gegevens kan (over 't algemeen) ook de uitkomst, de som der twee getallen, niet zijn.

Wat ik u hier voor de som heb laten zien, geldt met een kleine wijziging ook, als u die twee getallen moet vermenigvuldigen. Ook dit geschiedt, door de breuken ergens af te breken — alleen zullen de correcties, die u dan telkens genoodzaakt bent bij het verkregen provisorische getal aan te brengen, $a_0 + b_0 + 2$ eenheden van de laatst behouden plaats kunnen bedragen — maar onverschillig hoe groot a_0 en b_0 zijn: ook deze fout wordt willekeurig klein, als ik maar n groot genoeg kies.

Het aftrekken biedt geen nieuwe moeilijkheden, en alleen bij het delen van decimale breuken moet ik op mijn hoede zijn. Ik kan immers niet door 0 delen, en evenmin kan ik door een decimale breuk delen, waarvan ik niet weet, of er na een onafzienbare rist nullen voor en achter de komma ooit een cijfer komt, dat van nul verschilt. Maar zodra ik dit wel weet, kan ik zonder het minste bezwaar de regels van de lagere school voor het delen door tientallige breuken toe passen.

Het zal niet nodig zijn, nader in te gaan op de rekenwetten, die we dagelijks bij de vier hoofdbewerkingen toepassen; hun geldigheid ook bij oneindige decimaalbreuken is na het voorafgaande evident. Er rest alleen nog één punt, dat ik liever niet wil verdoezelen, en ik vind, dat men er ook in het onderwijs de aandacht op hoort te vestigen. Toen we de som van twee oneindige decimale breuken moesten voortbrengen, waren we genoodzaakt, min of meer van links naar rechts te werken, en dat betekende, dat we voorbereid moeten zijn op correcties, die echter nooit twee eenheden van de laatst bewerkte plaats te boven konden gaan. Hiermee is dan geenszins bedoeld, dat de voorlaatste plaats (en wat er nog verder links van deze plaats was verkregen) in 't vervolg gespaard blijft, dus dat het vlakgom van deze cijfers beslist af moet blijven. Hierover valt

in 't geheel niets te voorspellen. Zijn de twee summanden b.v.

$$\begin{array}{l} 0{,}3333\ldots \\ 0{,}6666\ldots \end{array}$$

dan luidt de som

$$0{,}9999\ldots,$$

maar die negens zijn allesbehalve veilig bezit, want zodra de drieën afgelost worden door een cijfer groter dan drie, verspringen de negens en veranderen in nullen, en de nul voor de komma wordt een één. Bij een getal, dat op een lange rij negens uitgaat, kan een kleine fout de gehele decimaalbreuk-ontwikkeling omverwerpen — L. E. J. Brouwer heeft dit verschijnsel critisch uitgedrukt in de stelling, dat er reële getallen zijn, die geen decimaalbreuk-ontwikkeling bezitten. We kunnen het getallen-continuum niet discreet ontbinden, en proberen we het desondanks, dan moeten we de discrete stukken weer samenplakken, en dat doen we door een decimaalbreuk

$$a_0,\ a_1 \ldots a_n\ 999\ldots$$

met een oneindige rij negens aan het eind te identificeren met de breuk

$$a_0,\ a_1 a_2 \ldots (a_n + 1)000\ldots$$

met een oneindige rij nullen.

Dat is dus een teer punt, en ik pleit er niet voor, van deze moeilijkheden gewetenskwesties voor leraren te maken. Ik vraag mij zelfs af of het nodig is, in de leerling het naieve geloof aan decimaalbreuken en aan het rekenen met deze dingen aan het wankelen te brengen. Want dat zou er immers aan vooraf moeten gaan. Theorieën, zoals die der reële getallen, die uitgevonden zijn, om aan een critiek het hoofd te bieden, kunnen alleen dan door een leerling goed worden begrepen, wanneer van te voren dezelfde critische houding in hem wakker wordt geroepen, waaraan die theorie haar oorsprong dankt. Ook als de leerling hiervoor toegankelijk is, blijft de vraag naar het nut ervan nog open. Dat neemt niet weg, dat men wel in het onderwijs het feit mag vermelden, dat een reëel getal twee verschillende decimaalbreuk-ontwikkelingen kan bezitten.

Zoveel over de invoering der reële getallen op school. Wat is hiervan nu het hoger aspect? Ik moet opnieuw de paedagogische stelling staven, dat de methoden van het middelbaar en het hoger onderwijs in elkaars verlengden horen te liggen en ook kunnen liggen — dit ten gerieve van de jongen, die gaat studeren, en van de doctorandus, die gaat onderwijzen.

Voert men de reële getallen als decimale breuken in, dan laat men het getal 10 een rol spelen, die alleen gerechtvaardigd is door het biologische verschijnsel, dat de mens 10 vingers heeft De breuken met noemers 10, die voor de approximatieve voortbrenging der reële getallen dienst deden, moeten van hun bevoorrechte plaats worden verdrongen door willekeurige breuken, maar de approximatieve voortbrenging als zodanig hoeft niet te vervallen. We gaan het nog denkbeeldige reële getal definiëren door een oneindige rij rationale getallen, die geacht wordt, dat reële getal te approximeren. We mogen dus geen willekeurige rijen rationale getallen toelaten, maar alleen rijen, die in zich zelf al dit approximerende karakter bezitten, ook als men nog niets van dat reële getal afweet, dat ze zullen moeten approximeren. Zulke rijen rationale getallen noemt men fundamentaalrijen, en hun definitie luidt precieser als volgt: de rij $\{a_n\}$ heet een fundamentaalrij, wanneer de na een a_n genoemde getallen van de rij maar nog weinig afwijken van a_n, dus in een willekeurige nabijheid van a_n liggen, als n maar groot genoeg is. Of nog precieser: de a_n vormen een fundamentaalrij, wanneer bij elke positieve (rationale) e een n is te vinden, zodat $| a_n - a_m | < e$ is voor alle $m > n$. Laat ik dus uit die rij voldōende veel (maar eindig veel) termen weg, dan zal de rest een willekeurig smal hoopje moeten vormen. Zulk een fundamentaalrij zal nu een reëel getal definiëren — maar niet meteen. Twee verschillende fundamentaalrijen zullen niet steeds tot verschillende reële getallen aanleiding geven. Zijn $\{a_n\}$ en $\{b_n\}$ er twee, waarbij het onderling verschil $a_n - b_n$ tot 0 nadert, dan doen wij verstandig, hieraan hetzelfde reële getal toe te wijzen. Twee dergelijke fundamentaalrijen, die alleen met een „nulrij" verschillen, worden nu „equivalent" genoemd, en onderling equivalente fundamentaalrijen worden in zogenaamde equivalentieklassen samengevat. De definitie van reëel getal, die hieruit voortvloeit, luidt tenslotte: „Een reëel getal is een klasse equivalente fundamentaalrijen van rationale getallen." Dat lijkt een zeer abstracte formulering — in werkelijkheid is het maar een voorbeeld voor het taalkundige schema, waarvan de moderne wiskunde zich onophoudelijk bedient. Iets simpeler hadden we kunnen zeggen: een reëel getal is een fundamentaalrij van rationale getallen, waarbij twee fundamentaalrijen, die alleen met een nulrij verschillen, als niet verschillend worden beschouwd. Dat is stilistisch simpeler, maar het bevredigt het taal-en stijlgevoel van de moderne wiskundige niet meer. Twee of meer dingen, die verschillend zijn, als gelijk te beschouwen — inderdaad, dit doen we vaak in de wiskunde, maar àls wij het doen, dan prefereren

we, het netjes te formuleren, en de nette methode is: al die dingen, die we met elkaar wensen te identificeren, tot één klasse samen te vatten, dus tot een nieuw ding, dat u ook kunt noemen de abstractie van al die met elkaar te identificeren dingen.

Hiermee is nu de definitie van het reële getal gegeven. De opbouw van de theorie der reële getallen begint dan pas, en ik wil hem hier niet eens schetsen. We hebben het begrip verkregen door uit het begrip decimale breuk tientalligheid als iets bijkomstigs te elimineren, maar de vier hoofdbewerkingen voor deze reële getallen worden net zo ingevoerd als daar straks bij de oneindige decimale breuken. Twee, door fundamentaalrijen $\{a_n\}$ en $\{b_n\}$ gedefinieerde reële getallen worden per definitie opgeteld, door $\{a_n + b_n\}$ te vormen, wat weer een fundamentaalrij blijkt te zijn. Zo gaat het verder, maar met een „en zo voort" is het niet gedaan — vijf à zes college-uren zijn zeker nodig, om de meest fundamentele dingen over reële getallen te bewijzen. Wat ik u hier wilde laten zien, is dat de naieve methode, om zich met het reële getal vertrouwd te maken, allesbehalve stuntelig en waardeloos is (zoals men zou kunnen denken, wanneer men van de hogere definities alleen die van Dedekind kent, die er inderdaad ver van af staat).Om van de elementaire opvatting tot die van de hogere wiskunde te geraken, heeft men feitelijk niets anders te doen, dan zich aan de taalkundige gewoonten der moderne wiskunde aan te passen.

Het getal, zoals ik het hier heb gedemonstreerd, is het onderwerp der analyse. Er is nog een andere visie op het getalbegrip, die ik ook reeds heb aangekondigd: de algebraische opvatting. Laten we vergeten, wat ik net heb verteld over reële getallen en decimaalbreuken. Laten we ook vergeten, dat we $\sqrt{2}$ kunnen „berekenen", door het te approximeren — decimaal of anderzsins. Wat is $\sqrt{2}$ dan? Geen leerling, die zijn definities goed van buiten kent, zal het antwoord schuldig blijven: $\sqrt{2}$ is dàt (positieve) getal, waarvan het kwadraat 2 is. Op de vraag, hoe groot dat getal nu werkelijk of bij benadering is, zullen de meesten niet meteen een behoorlijk antwoord weten — en terecht, want ze kunnen er ook buiten. Zelfs wanneer ze er niet de minste notie van bezaten, dat die $\sqrt{2}$ ook zo iets als een grootte bezit, zou de definitie, die we net opnoemden, toereikend zijn, om hun bij alle sommen, waar $\sqrt{2}$ in voorkomt (althans van een bepaald type), te zeggen, wat ze ermee moeten doen. $\sqrt{2}$ is een symbool, waarmee je zo rekent, dat zijn kwadraat 2 is, en wanneer je nu b.v.

$$\frac{3 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$$

moet uitrekenen, dwz. in de vorm $a + b\sqrt{2}$ schrijven, dan *hoef* je van $\sqrt{2}$ ook niet meer dan dit definiërende feit te kennen. Men noemt deze geesteshouding, waarbij men — bewust of onbewust — het feit verwaarloost, dat $\sqrt{2}$ een grootte bezit, ook wel de formele — door de *vorm* van de vergelijking $x^2 = 2$, waardoor $\sqrt{2}$ is gegeven, zijn de eigenschappen van $\sqrt{2}$ bepaald; je weet dan, hoe er mee te rekenen, en het kan je niet schelen, of er in het gebied van de reële getallen, dus benaderd door rationale getallen, iets bestaat, dat aan de vergelijking $x^2 = 2$ voldoet. Wanneer men zich op dit formele standpunt plaatst, houdt men zich met „algebra" bezig — zo vat men tenminste tegenwoordig de benaming „algebra" op.

De werkwijze van de schoolwiskunde is overwegend formeel algebraisch, en wanneer ik mij niet vergis, dan aanvaardt de leerling deze werk- en zienswijze zonder aarzelen. Wanneer de worteluitdrukkingen aan de beurt zijn, kan de leerling wekenlang zuiver formeel met deze symbolen rekenen, zonder zich ook maar één keer te realiseren, dat $\sqrt{2}$ de diagonaal van een vierkant met zijde 1 is, en dat algemener al deze tekens getallen, grootheden, voorstellen. De vereiste routine in de aan te leren bewerkingen wordt misschien juist door dit kunnen-vergeten van minder formele elementen verkregen.

Is deze instelling nu verkeerd? Het antwoord op deze vraag kunnen we weer van hoger standpunt geven, door er in de hogere wiskunde het verlengde van op te zoeken. We vinden het in de theorie der lichamen. Laten we ons op het standpunt plaatsen, dat we alleen de rationale getallen kennen. We ontmoeten een vergelijking zoals

$$x^3 - x - 1 = 0$$

en slagen er niet in, die rationaal op te lossen. Wat gaan we doen? We voeren formeel een ding — laten we zeggen x — in, dat deze vergelijking oplost, en we beginnen met dat ding te rekenen, zo als we sinds de middelbare school gewend zijn met letters te rekenen — alleen met dien verstande, dat altijd $x^3 - x - 1 = 0$ wordt gesteld. Dwz. zodra we een x^3 tegenkomen schrijven we er $x + 1$ voor, dus x^4 wordt vervangen door $x^2 + x$, x^5 door $x^3 + x^2$, dus door $x^2 + x + 1$, enz. Alles wat we bij het rekenen met deze x tegenkomen, kunnen we telkens weer tot een drieterm $ax^2 + bx + c$ reduceren, met rationale a, b, c. Voor het optellen, aftrekken en vermenigvuldigen spreekt dit vanzelf; wat de deling aangaat is dit niet zonder nader bewijs duidelijk. Dit kan b.v. als volgt worden gevoerd: Moet men door een veelterm $f(x)$ delen, die geen veelvoud

van $x^3 - x - 1$ is, dan kan dit ook geschieden door te vermenigvuldigen met een $g(x)$, die voldoet aan

$f(x) g(x) = 1$ op een veelvoud van $x^3 - x - 1$ na.

Zulk een $g(x)$ wordt dus gevonden door

$$f(x) g(x) + (x^3 - x - 1) h(x) = 1$$

op te lossen, dwz. geschikte $g(x)$ en $h(x)$ te zoeken. Dat is inderdaad mogelijk, aangezien men weet, dat $x^3 - x - 1 = 0$ irreducibel is, dus geen rationale wortels bezit. Practisch kan het geschieden volgens dezelfde methode, die men in de getallenleer toepast, om van twee getallen de grootste gemene deler te zoeken (de Euclidische algorithme).

Wat we hier hebben gedaan, noemt men ook uitbreiding van een lichaam door adjunctie van een (geheel formeel opgevatte) oplossing van een algebraische vergelijking. Noemen we deze wortel thans ϑ, dan kunnen we $x^3 - x - 1$ door deling door $x - \vartheta$ reduceren tot een vierkantsvergelijking en opnieuw een wortel van deze vierkantsvergelijking formeel adjungeren; de overblijvende derde wortel kan tenslotte in de eerste en tweede worden uitgedrukt. Welke *numerieke* grootheden aan de eerste, tweede en derde wortel beantwoorden, is een vraag, die geen zin heeft; de drie wortels zijn niet te onderscheiden — op deze symmetrie-verschijnselen berust trouwens de theorie van Galois. Pas wanneer men de oplossingen in het getallen-continuum plaatst, worden deze wortels individuen — in de elementaire wiskunde houdt men hiermede bij het trekken van vierkantswortels rekening, door te bepalen, dat men onder *de* vierkantswortel uit een positief getal m de positieve oplossing van $x^2 = m$ verstaat. Maar zolang men zich op het formele standpunt plaatst, zijn $\sqrt{m}$ en $-\sqrt{m}$ allebei alleen door het feit bepaald, dat zij oplossingen van de vergelijking $x^2 = m$ zijn — ze zijn eender gedefinieerd, en er zijn zorgvuldig gekozen formuleringen vereist, om hier logisch niet in de war te raken.

Ik heb als voorbeeld een derde-graads-veelterm gekozen. Dit was natuurlijk niet essentieel. Deze veelterm kan door worteltrekkingen worden ontbonden — iets wat voor een willekeurige veelterm niet meer geldt. Ik had trouwens ook een kwadratische veelterm kunnen kiezen, en een bijzonder aantrekkelijk voorbeeld is de vergelijking

$$x^2 + 1 = 0,$$

die niet alleen niet rationaal, maar zelfs niet reëel kan worden opgelost. Als oplossing hiervan pleegt men reeds op school, zuiver formeel, de letter i in te voeren. Volgens mijn weten rekent de for-

meel geschoolde leerling met een i, waarvan het kwadraat -1 is, met even weinig gemoedsbezwaren als met een $\sqrt{2}$, waarvan het kwadraat 2 is gesteld. Ik zie dus geen aanleiding tot paedagogische aarzelingen, om het getal i op deze naieve wijze in te voeren. Men zet dan slechts dat voort, wat men vroeger is begonnen, toen men met $\sqrt{2}$ formeel ging rekenen; men bereidt de leerling door dit formalisme voor op formele methoden, zoals men er meer in de wiskunde kent, en men doet bovendien iets wat van een hoger standpunt van exactheid geheel verantwoord is. Ik weet wel, dat er paedagogen zijn, die reeds op school de complexe getallen willen introduceren als paren van reële getallen, die aan een stel rare rekenwetten voldoen. Ik ben het hiermee niet eens. Wil de leerling er de zin van vatten, dan zou men eerst zijn naieve vertrouwen in de onfeilbaarheid van de formele methoden grondig moeten doorzeven — met misschien als gevolg, dat hij het geloof niet alleen in i maar ook nog in $\sqrt{2}$ verliest. Zonder deze critische houding is de waarde van al die finesses op zijn minst zeer problematisch. Waarom zou men ook in het schoolonderwijs hoger eisen van exactheid stellen, wanneer men de imaginaire getallen invoert, dan bij het invoeren der gehele getallen, der gebroken getallen, der wortel-uitdrukkingen en der reële getallen?

Ik zeg u dit niet, om uw wetenschappelijk geweten in slaap te sussen. Ik wil het veeleer wakker schudden. Echter niet, om van u te vragen, dat u naast een slordige schoolwiskunde ook nog een boven elke blaam verheven hogere wiskunde zoudt beoefenen. Het doel van uw bekendheid met hogere wiskunde moet veeleer zijn, een vruchtbare synthese te kunnen zoeken — vruchtbaar zowel ten bate van het onderwijs als ook ten bate van de wetenschap.

DISCUSSIE.

Dr Streefkerk (Hilversum) opent de discussie met de opmerking, dat spr. sommige behandelingswijzen uit de elementaire wiskunde verwerpt, omdat van hoger standpunt uit blijkt, dat aan een andere manier de voorkeur gegeven zou moeten worden. Maar ook de eerste manieren komen ten slotte van de Universiteit. Zijn deze misschien verouderd? Maar hoe zal de toestand over 40 jaar zijn? Waar moet men dan naar teruggrijpen? Door het antwoord van Prof. Fr. ontstaat er onmiddellijk een levendige en geanimeerde discussie. Prof. Fr. neemt nl. de z.i. moeilijke situatie aan de Universiteit onder de loupe. Er zijn 2 typen ll., nl. 1e. de groep, die later bij het onderwijs komen, en 2e. de a.s. researchwerkers. Het is, volgens

de mening van Prof. Fr., niet mogelijk beide groepen tezamen een goede opleiding te geven. De stof is voor de a.s. leraren te omvangrijk en te ingewikkeld, terwijl hij voor de researchwerkers onvoldoende is. Deze laatsten moeten na hun studie nog 2 a 3 jaar opgeleid worden. In deze situatie bevinden we ons en blijven we ons bevinden, want de splitsing, zoals deze door de Universiteiten en een deel der Staats Commissie wordt voorgesteld, is door de leraren verworpen. Hun motivering, verlaging van hun wetenschappelijk peil, is onjuist. Ze realiseren zich niet, dat de wetenschappelijke eisen sterk gestegen zijn. In dit verband deelde Prof. Fr. mee, dat aan sommige universiteiten de eisen voor Natuurkunde als bijvak voor wiskundigen sinds 15 jaren ongeveer vervijfvoudigd zijn. Er *moeten* echter meer researchwerkers opgeleid worden; de leraren gaan daaraan ten gronde.

Door verschillende aanwezigen wordt op dit standpunt van Prof. Fr. scherp commentaar geleverd. Dr Wansink (Arnhem) verdedigt, bijgestaan door anderen, het standpunt van de leraren. Bij een gesplitste opleiding zouden wij de researchwerkers niet meer verstaan. Beide groepen kunnen echter een grote invloed op elkaar uitoefenen. Zolang er geen goede paedagogische opleiding voor in de plaats komt, hebben de leraren gelijk, dat ze zich niet laten déclassificeren, aldus Ir. Veldhuis (Den Haag). Laat eerst de paedagogisch-didaktische opleiding op hetzelfde plan gebracht worden als de wetenschappelijk mathematische opleiding, dan zullen we verder spreken, merkt Dr Turkstra (Hilversum) op. Prof. Fr. brengt in zijn repliek als zijn mening naar voren, dat de studenten een heterogeen gezelschap zijn en al vroeg elkaar niet kunnen verstaan. De stof, die we hun moeten geven, is slechts voor 2 van de 15 geschikt. Vele van deze zouden goede leraren kunnen worden, als ze minder wiskunde behoefden te leren. Prof. Fr. geeft verder toe, dat de paedagogische opleiding nog niet wetenschappelijk gelijkwaardig is aan de mathematische opleiding, maar is van mening, dat zij dit ongetwijfeld zal worden, als men er nu mee zou beginnen. Hij heeft indertijd het volgende plan gemaakt: Eerst 2 jaar Universiteit, daarna 1½ jaar in de practijk en tot slot nog 1½ jaar naar de Universiteit terug. De didaktische lessen hebben nl. geen waarde, zonder dat deze aan de practijk kunnen worden getoetst. Bovendien kan op deze manier de studie financiëel vergemakkelijkt worden.

Tot slot houdt Dr Wansink een vurig pleidooi voor het standpunt van de leraren. Hij merkt op, dat alles afhangt van de sociale waardering voor het leraarsambt. Hij vraagt zich af, waarom een

arts na zijn doctoraal niet bevoegd is zijn practijk uit te oefenen, terwijl de leraar met het doctoraal examen de lesbevoegdheid krijgt. Hij stelt voor een „leraarsexamen" in te stellen bv. ½ jaar na het doctoraal. We willen echter niet worden gedéclassifiseerd en we willen volkomen met de anderen samen werken. De autoriteiten willen ons echter de weg met de minste weerstand laten afleggen naar het leraarsambt. Het zou zeer bedroevend zijn, aldus de Hr Wansink, als de leraren in hun verzet de steun van de Universiteit zouden missen. (Applaus).

Enkele sprekers komen nog op een paar détails uit de inleiding van Prof. Fr., terug. Zo vraagt Dr Bunt, waarom de snede van Dedekind geen goede methode is. Bij de opbouw der vlakke meetkunde volgens Hilbert komt toch een analoge gedachtengang voor? Prof. Fr. geeft in zijn antwoord te kennen, dat er heel uitzonderlijke gebieden zijn, waar analoge methoden, als de snede van Dedekind een rol spelen. Ook het aangehaalde onderwerp kan zonder deze begrippen ingevoerd worden.

Naar aanleiding van vragen inzake de invoering van de complexe getallen, deelt Prof. Fr. mee, dat hij de mening is toegedaan, die ook in de Wiskunde Werkgroep bestaat, dat men òf de complexe getallen *niet* op de M. S. moet behandelen òf zeer uitvoerig.

Tot slot komt men nog over de beschrijvende meetkunde te spreken. Prof. Fr. beschouwt dit gedeelte als een waardeloos vak, dat niet thuis hoort op een M. S. Delft is slechts één der zeer weinige hogescholen, waar de beschrijvende meetkunde nog wordt onderwezen. Dr Wansink zou toch de beschrijvende meetkunde niet willen afschaffen. Hier kunnen de leerlingen hun stereometrisch betoog realiseren in de vorm van een tekening. Hij ziet niet in, waarom de beschr. meetk. in de banvloek moet worden gedaan.

De Wisk. Werkgroep zal over dit onderwerp nog eens van gedachten wisselen. Hierna wordt de discussie over de inleiding van Prof. Fr. besloten.

EEN POGING OM DE RICHTLIJNEN OP TE STELLEN VOOR EEN DIDACTIEK DER WISKUNDE

door

P. M. van Hiele.

Het is niet mijn bedoeling in deze inleiding eigen inzichten over een didactiek der wiskunde naar voren te brengen, al zal ik allicht niet kunnen vermijden soms eigen opvattingen te uiten. Ik wil hier onderzoeken, welke vragen men zal moeten beantwoorden om te komen tot het opstellen van een didactiek voor een der gebieden, die de wiskunde op de M. S. bestrijkt. Daar ik weinig literatuur heb kunnen raadplegen over dit onderwerp, zal ik stellig niet volledig zijn. Aan U zou ik willen verzoeken mij hierbij aan te vullen.

Voor het juiste begrip van het gestelde probleem moeten wij drie zaken in het oog houden:

A. Het doel, dat met het wiskundeonderwijs beoogd wordt.

B. De kennis, die de leerlingen reeds bezitten op het moment, dat wij voor het eerst met hen in de betrekking komen van leraar tot leerling.

C. De wijze, waarop die aanwezige kennis zo doelmatig mogelijk kan worden uitgebreid tot die, welke aan het einde van het leerproces verlangd wordt.

A. **Het doel.**

a. Over het doel van het wiskunde onderwijs bestaat geen volkomen eensgezindheid. Velen zijn van mening, dat de grote betekenis vooral gelegen is in het kennismaken met en het hanteren van wat men wel „de wiskundige denkvorm" noemt en waartoe men een heel complex van werkmethoden, redeneerwijzen, enz. kan rekenen. Kenmerkend voor zo'n redeneerwijze is steeds het toepassen van „een gedachtengang, ondersteund door overwegend indicatieve woord-woord associaties" (Mannoury). In meer eenvoudige taal: Het vervangen van een in woorden uitgedrukte gedachte door een andere, die we equivalent noemen zonder dat bij deze vervanging emotionele of wilselementen een rol spelen (al zal men natuurlijk het resultaat wel „willen" en bij het bereiken ervan „emotie" gevoelen).

b. Men kan zich echter ook een veel minder verheven doel-

stelling denken. De schoolwiskunde beoogt ook het verkrijgen van ruimtelijk inzicht (meetkunde) en rekentechniek (algebra). Ik geloof niet, dat het nodig is de meer of mindere belangrijkheid van het eerste of de beide laatste aspecten tegen elkaär af te wegen. Om vereenvoudiging van het probleem te verkrijgen laat ik bovendien vele aspecten, die misschien nog belangrijker zijn voor de ontwikkeling van de ll. als mens, maar die ook in andere leervakken een rol spelen, buiten beschouwing.

c. Zelfs al zou men aan de wiskundige denkvorm in het geheel geen eigen waarde toekennen, dan zou zij nog van betekenis zijn, omdat zij het bindend element vormt in de schoolwiskunde, waardoor deze denkwijze langer in het geheugen blijft dan het feitenmateriaal. Stellingen en formules worden vergeten, maar de werkmethode blijft. Zodat met behulp van de wiskundige denkvorm de ll. de potentie zullen hebben tot het verkrijgen van een goede rekentechniek en het oplossen van ruimte-problemen.

d. Als de ll. dan toch stellingen, formules en definities vergeten, waarom moeten we hen deze dan uit het hoofd laten leren? Het is mogelijk, dat dit uit het hoofd leren nuttig is om bij een bepaald gebied het daar direct betrekking op hebbende feitenmateriaal paraat te hebben, zekerheid hierover heb ik niet.

e. Het toepassen van de wiskundige denkvorm wordt pas mogelijk, als de ll. met het betreffende taalgebied is vertrouwd geraakt. De ll. van de eerste klas zijn nog niet vertrouwd met woorden als: wat is . . ., waarom, noodzakelijk, voldoende, mits, tenzij, wij veronderstellen bekend, dat, enz. Tal van moeilijkheden kunnen op dit misverstaan teruggevoerd worden. De verkenning van dit taalgebied dient dus vooraf te gaan aan de eigenlijke wiskunde.

f. Wis- en natuurkunde lijden aan een definieerziekte. Wij zijn gewend alles te definiëren, omdat we menen dat dit zo hoort. Maar in het gewone taalgebied kunnen we ons veelal best redden zonder alles te definiëren. Bovendien kunnen we niet alle gebruikte woorden definiëren, omdat we ons daarbij weer van de taal bedienen. Een veel eenvoudiger methode is vaak het vastleggen van de onderlinge betrekkingen van een aantal begrippen. Zoals bv. in de axioma's van de planimetrie de definities van punt, lijn, vlak, liggen op, gaan door, worden gegeven in deze axioma's zelf. Ik wil dus een lans breken voor het meer toepassen van de *impliciete* definitie.

g. De wiskunde behoort tot een geheel van vakken, die te zamen ten doel hebben bij te dragen tot de opvoeding van de ll. Wanneer wij de betekenis van de wiskunde hierin willen vaststellen, moeten

wij niet van óns standpunt uit willen beslissen, welk deel hiervan in de wiskunde te verwezenlijken is. Dit zal in overleg met de collega's van de andere vakken zorgvuldig moeten worden afgepaald. Het is zeer goed mogelijk, dat daarbij t.o.v. de ll. individueel grote verschillen zullen bestaan.

B. **De kennis, die de ll. reeds bezitten.**

a. Dat deze kennis er is, zal moeilijk betwist kunnen worden. Reeds zeer vroeg heeft het kind ervaringen, die aanleiding geven tot het tellen, het optellen en het aftrekken.

b. De ll. in de eerste klas van de M. S. hebben een verschillende ervaring en dientengevolge al een verschillend tempo. Examentraining heeft vaak remmend op het eigen initiatief gewerkt; bij alles zoeken ze naar het maniertje, dat daarbij geleerd behoort te zijn. Bij grote aantallen gegevens raken de ll. vaak dermate beduusd, dat ze maar liever niet beginnen. Bij overbodige gegevens raken ze vaak van de wijs, omdat ze daar niet aan gewend zijn. Vele zaken menen ze te weten omdat ze een paar maniertjes geleerd hebben (breuken). Bovendien heeft de voorafgegane examentraining aan de ll. een grote voorkeur voor deze werkmethoden aangekweekt. Hier heeft U de situatie aan het begin van het eerste jaar, waarbij weer sterke individuele verschillen kunnen optreden al naar gelang de L. S. zich meer of minder aan de opleiding heeft gewijd (of door onze eisen heeft *moeten* wijden).

c. Er wordt vaak beweerd, dat men niet met wiskunde kan beginnen voor de ll. een bepaalde leeftijd (bv. 15 jaar) heeft bereikt. Dit in verband met slechte ervaringen van wiskundeleraren of met testproeven gepleegd op leerlingen. Ik geloof dat deze conclusie voorbarig is: het is heel goed mogelijk, dat wiskundig redeneren *geleerd* moet worden (leerbaar is).

d. De meetkunde ervaringen, die de ll. op de L. S. opdoen, beperken zich meestal tot het kennis nemen van een aantal formules van oppervlakten. Belangrijker zijn voor ons dikwijls de ervaringen buiten de L. S. opgedaan met bouwdozen, mozaïekdozen, enz.

e. Het kan nodig zijn op de M. S. verschillende reeds aanwezige begrippen om te werken. Zo weten de ll. wel vaak, hoe ze een min of meer geschikte definitie moeten opstellen, veelal treden daarbij echter ook negatieve kenmerken op: Een parallelogram is een vierhoek, waarvan de overstaande zijden parallel zijn en waarvan de hoeken niet recht zijn, Deze voor ons onbruikbare noties kunnen nog tot in de hoogste klasse van de M. S. een rol spelen.

f. Over het algemeen merken we, zoals reeds opgemerkt, bij

de beginnende ll. voorkeur voor het leren van een regel, verder voor het rekenen, het construeren, daarentegen afkeer voor het redeneren. Ik meen, dat we de verklaring niet noodzakelijk hoeven te zoeken in de leeftijd, deze kan even goed gevonden worden in de onbekendheid met het betreffende taalgebied. Het is nu eenmaal niet aangenaam te moeten redeneren in een taal, die men ternauwernood verstaat en dus zeker niet kan spreken.

C. De wijze, waarop de aanwezige kennis doelmatig uitgebreid wordt.

1. *De wil.*

a. Ik kom hier aan een vraag, waarvan m.i. het slagen van een leermethode voornamelijk afhangt, nl.: Wordt de leerstof door de ll. zelf gewild? Ik meen, dat wij er naar zullen moeten streven de ll. alleen die stof aan te bieden, die ze zelf willen. Indien dit eigen verlangen uitblijft moeten we maar eerst eens iets anders aanbieden en trachten op verschillende wijzen de begeerlijkheid van de versmade stof onder het oog te brengen. We zoeken dan dus naar een entrée. Men zal misschien zeggen, dat hierbij bv. gebruik gemaakt kan worden van de natuurkunde, die immers wiskunde nodig heeft. Ik heb hier weinig verwachtingen van: de wiskunde, die bij de natuurkunde nodig is, is meestal van weinig betekenis, of eist plotseling een zo grote hoeveelheid door te werken stof, dat aan de ll. de lust spoedig weer vergaat. Ook de geschiedenis van de wiskunde bij de Grieken leert, dat de natuurkunde daar weinig stimulerend heeft gewerkt. Wij kunnen onze entrées beter vinden in de wiskunde zelf: er zijn puzzles, die boeien en een bepaald gebied van de wiskunde ontsluiten.

b. De verschillende aard van de ll. maakt het wenselijk verschillende entrées paraat te hebben. De verschillende achter elkaar door te werken onderwerpen moeten voldoend sterke onderlinge binding bezitten om te maken, dat de kennis in het ene gebied, opgedaan, opbouwend werkt in het andere gebied.

c. Het is nodig ons rekenschap ervan te geven, waarom voor de ll. wiskunde aantrekkelijk kan zijn. Ik vond de volgende motieven:

1e. *Het spelmotief*, m.i. de voornaamste drijfveer,

2e. *De scheppingsdrang*, m.i. het krachtigste motief, maar minder algemeen voorkomend in de wiskunde. Het treedt op bij constructies, opstellen van definities, enz.

3e. *De verklaringsnood*, veel belangrijker in de natuurkunde dan in de wiskunde. Het komt voor in vraagstukken van de vorm: Waar zit de fout.

4e. *Het nuttigheidsargument*, een zwak motief. Over het algemeen laten de ll. er zich weinig aan gelegen liggen of men opmerkt: Je hebt straks wiskunde nodig voor Delft, voor de studie der handelswetenschappen, om te kunnen zeilen, koken, enz.

d. Wanneer men van dit standpunt uit de gebruikelijke wiskunde opgaven beziet, dan blijken er nog meer ongeschikt te zijn, dan men (gerekend naar hun uiteindelijke toepasbaarheid) zou verwachten.

e. Men kan de belangstelling voor een nieuw te behandelen onderwerp opwekken en gaande houden door bij de aanvang reeds het doel en de betekenis aan de ll. duidelijk te maken. Zo kan men de stereometrie beginnen met een of ander bekend lichaam (bv. kubus) en daaraan nagaan de begrippen: lengte van een lijnstuk, oppervlakte, inhoud, kruisen, evenwijdigheid, loodrechte stand, hoeken, snijden van lijnen en vlakken, afstand, om- en ingeschreven bollen. Of men kan zich bij de goniometrie ten doel stellen het verband tussen de hoeken en de zijden van een driehoek te gaan ontdekken.

2. *De zelfwerkzaamheid.*

a. Het begrip zelfwerkzaamheid is zeer rekbaar. Iedereen, die zijn leerlingen vraagstukken laat maken kan beweren, dat hij het principe der zelfwerkzaamheid toepast. Toch is het effect dan niet zo groot, als het wel kan zijn. Wij hebben de verwachting, dat als de ll. zelf iets tot stand hebben gebracht, de herinnering hieraan, vooral van de toegepaste gedachtengang, langer behouden zal blijven. Maar dan zal ook het beste resultaat worden verkregen, als de ll. ook zelf scheppend deel hebben genomen aan het bouwwerk van de wiskunde: zelf de definities hebben opgesteld, de noodzakelijke stellingen hebben geformuleerd en bewezen, enz.

b. Hiervoor is dan nodig, dat de stof zo door ons gerangschikt wordt, dat met onze hulp ordening door de ll. zelf mogelijk wordt. Men zal daartoe moeten oppassen, dat de beginstof geen stellingen met te veel gegevens bevat, men zal de onvoldoende begrepen, maar zogenaamd bekende leerstof op ongedwongen wijze moeten repeteren, men zal de ll. het uitsluitend mechanische werken moeten afwennen. Verder zal men zulke gedachtenreeksen moeten kiezen, dat de weg tussen begin- en eindpunt door de ll. in zijn geheel te overzien is.

c. Het zal kunnen voorkomen, dat men een kort bewijs voor een of andere stelling zal moeten verwerpen, omdat een andere wat langere bewijsvorm meer voor de hand ligt, meer aansluit bij de visie, die de ll. op het gegeven moment op de stof hebben.

3. *Het begrijpen.*

a. Wij zijn gewend de doeltreffendheid van ons onderwijs te toetsen aan de mate van begrijpen bij de ll. Ik'meen, dat we ons daarbij op drijfzand begeven, omdat het begrijpen zelf geen vaststaand begrip is. Als een ll. meent iets begrepen te hebben, bedoelt hij veelal, dat hij het feit kan aanvaarden, (emotioneel element). Als wij menen, dat de ll. het begrijpt, betekent dat, dat de ll. aan bepaalde toetsingen, die wij (subjectief) aanleggen, beantwoordt. Deze twee begrippen dekken elkaar geenszins.

b. Het zelf-begrijpen is van belang, omdat het de ll. animeert om verder te gaan. Dit begrijpen berust ten dele op herkennen. Lange gedachtenreeksen kan men aanvaardbaar maken door ze enige tijd van te voren in afgekorte vorm aan te bieden. Het differentiëren bijv. is een zeer complexe bewerking. Wanneer men eerst uitsluitend het principe behandelt en daar de ll. mee vertrouwd laat worden, dan zal de theorie later vlot kunnen worden afgewerkt. Behandelt men daarentegen de theorie direct na de kennismaking met het begrip differentieren, dan krijgt de ll. bij iedere afleiding een twee maal zo lange gedachtenreeks, die hij als een totaal moet overzien.

4. Wij mogen de kennis, die de ll. hebben opgedaan, voordat ze op de M. S. komen, niet negéren. Zouden wij dit wel doen, dan bestaat de mogelijkheid, dat op de meest ongelegen momenten niet het door ons opgekweekte, maar het andere ongewenste, maar niet uitgewiste begrip in de redeneringen binnendringt. We zullen er zorgvuldig voor moeten waken dat de ll. de onjuiste (voor ons doel ongewenste) noties van de hun bekende begrippen afwennen en er de juiste aan leren verbinden. De zonder logisch verband aanvaarde kennis moet in overeenstemming worden gebracht met het wiskundig denken.

5. *Coördinatie met andere vakken.*

We kennen allen de opdrachten, ons gegeven door onze collega's van de andere vakken: „Je moet zorgen, dat de vierkantsvergelijkingen voor het begin van de derde klasse behandeld zijn, want anders loop ik vast met mijn vraagstukken over de wet van Boyle." „De bisectrixstelling moet voor Pasen van het tweede jaar behandeld zijn, ander kan ik de holle spiegel niet behandelen." „Wij moeten bij onze wiskunde-collega's op de scholen, waar dit nog niet gebeurt, er op aandringen, dat zij aan het begin van de vierde klasse de limieten, het differentiaal quotient en het integraalbegrip behandelen" (Krans op het 7e congres van leraren in wiskunde en natuurwetenschappen op 1 April 1948).

Zonder meer kan men aan wensen dienaangaande moeilijk voldoen: dit hangt af van de vraag of het mogelijk is de ll. tijdig op het vereiste niveau te brengen, maar vooral ook of de geschikte entrée voorhanden is. Bij de diff. rek. ligt deze in de bewegingsleer. Men zou dus de zaak op zijn kop zetten, indien men *ter wille van* de bewegingsleer, die in de natuurkunde behandeld wordt, de diff.-rek. liet voorafgaan in de wiskunde.

6. *De wiskundige ordening.*

a. De ll. moet ervaren, dat de ordening nuttig is. Bv. aan de hand van onoverzichtelijke problemen. (Vb. het tellen van de hoekpunten van een twintigvlak).

b. De ll. moet ervaren, dat de logische ordening de gewenste is. Men kan verbindingen opsporen van de vorm: Als A waar is, dan is ook B waar. Een keten van dergelijke verbindingen geeft een besparing van waarheidsoordelen. De kringredenering kan dienen als waarschuwend voorbeeld, dat de ordening steeds in dezelfde richting moet geschieden.

c. De betekenis der definities wordt duidelijk, zodra er strijd over een woordbetekenis ontstaat. Het zelf opstellen van definities is goed mogelijk en nuttig. Hierbij blijkt dan het verschil tussen een synthetische definitie, waarbij wij zelf die noties in het begrip leggen, die we het best kunnen gebruiken en de analytische definite, waarbij we trachten vast te stellen, welke noties in het spraakgebruik aan het begrip door ons zijn verbonden. Vaak zal een synthetische definitie moeten worden voorafgegaan door een analytische (regelm. lichamen). Tevens komt bij de verschillende uitbreidingen naar voren, hoe de synthetische definitie naar believen gewijzigd wordt.

d. De eenzijdige gerichtheid van de logische ketens voert vanzelf tot het begrip axioma. Deze komen dus pas *na* de ordening ter sprake. Ik meen, dat men bij de keuze der axioma's zoveel mogelijk van de realiteit moet uitgaan. Men kan aangeven, hoe verschillende gelijkwaardige axiomastelsels bestaan. Ook zal het goed zijn er op te wijzen, dat een ander niet-equivalent axiomasysteem voert tot andere stellingen met andere waarheden.

7. *Toepassing van de richtlijnen op een concreet voorbeeld.*

Wij stellen ons voor de inhoudsformule van de pyramide ($\frac{1}{3}$Gh) af te leiden. Hierbij moeten dan de volgende vragen door ons opgelost worden:

1e. Bestaat er op het gegeven moment belangstelling bij de ll. voor de formule?

2e. Is het logische moment gekomen om de formule af te leiden? Dit is de vraag die men zich wel altijd gesteld zal hebben.

3e. Bestaat er bij de ll. belangstelling voor het opstellen van de formule?

4e. Zullen we de ll. meedelen, *waarom* er bij deze afleiding gebruik gemaakt wordt van een geheel nieuw principe: het verdelen van de pyramide in oneindig veel delen? Zoals U weet is het i.h.a. niet mogelijk een door platte vlakken begrensd lichaam in een ander lichaam met dezelfde inhoud te veranderen met behulp van de methode, waarbij men het eerste lichaam door platte vlakken in een eindig aantal delen verdeelt en deze door een andere groepering in het andere lichaam omzet. Maar we kunnen het bewijs van deze onmogelijkheid niet aan de ll. geven, dat is veel te moeilijk.

5e. Welke gevallen van pyramideinhouden kunnen we berekenen zonder de formule te kennen?

6e. Is het mogelijk aan de hand van deze gevallen de inhoudsformule te voorspellen (te raden)?

7e. Keuze van de te volgen methode. Veronderstel, dat wij het principe van Cavalieri toepassen, dan zal, wil dit principe ingang vinden, dit principe elders (bv. bij de inhoud van de bolschijf) ook moeten worden toegepast.

8e. Onderzoek naar de verschillende stapjes, waarin de afleiding verdeeld kan worden. Deze zijn:

a. Het aanbrengen van de evenwijdige vlakken, *b.* welke lichamen ontstaan er bij de verdeling, *c.* het vergelijken met ingeschreven prisma's, *d.* gelijkvormigheid van de doorsneden, *e.* oppervlakten van de doorsneden, *f.* inhoud van de prisma's, *g.* de omgeschreven prisma's, *h.* wat wordt er met de twee series prisma's aangetoond, *i.* verschil van de twee series prisma's, *j.* sommering van de serie. (Dit laatste punt bestaat uit vele onderdelen), *k.* interpretering van het resultaat.

Moeten wij al deze stapjes aangeven? Voordelen daarvan zijn: minder kans op het niet begrijpen van een zo'n stapje, meer automatisch verlopende zelfwerkzaamheid; nadelen zijn: verlies van het overzicht (muizenvalinductie), verlies van attractie voor de ll., de ll. verliest het doel uit het oog.

9e. Moeten wij het bewijs voordoen, of zelf laten werken en het achteraf nog eens doornemen? In het eerste geval komen de ll. sneller klaar; nadelen zijn, dat de ll. op het moment van de

behandeling wel eens niet gedisponeerd kan zijn, niet ieder onderdeel door heeft, het thuis misschien vergeten is.

10e. Moet de ll. het bewijs vlekkeloos kunnen opschrijven of opzeggen?

11e. Welke toepassingen van de formule hebben de belangstelling van de ll.?

12e. Welke toepassingen van de bewijsmethode hebben de belangstelling van de ll.?

13e. Bevat de bewijsmethode principes, die men beter vroeger had kunnen voorbereiden?

14e. Welke blijvende invloed heeft het behandelde op de ll. en is deze invloed de behandeling van het onderwerp waard?

15e. Hoe is deze invloed toetsbaar?

16e. Bestaat de mogelijkheid deze behandeling te doen opgaan in een groter geheel op het gebied van de wiskunde, zodat hierin een algemeen bindend principe tot uitdrukking komt? Bv. door verband te zoeken met de integraalrekening?

17e. Bestaat de mogelijkheid deze behandeling te doen opgaan in een groter geheel in én buiten het gebied van de wiskunde? Kan er bv. een entrée gevonden worden tot dit gebied van de wiskunde?

Ik hoop, dat dit voorbeeld U duidelijk heeft gemaakt, welke vragen naar mijn mening beantwoord moeten worden, voor men van een verantwoorde didactiek kan spreken. Ik wil in de discussie graag van U horen in hoeverre ik belangrijke vragen heb vergeten, in hoeverre ik vragen onjuist heb gesteld en welke vragen door U overbodig geacht worden. U gelieve te bedenken, dat ik allerminst de aangewezen persoon ben om hier de weg te wijzen: ik heb nauwelijks 12 jaar onderwijservaring, mijn kennis van de literatuur over dit onderwerp is gering. Het is slechts mijn grote verlangen om tot een betere onderwijsmethode te komen, dat mij de moed heeft gegeven deze inleiding te houden.

DISCUSSIE.

Dr van Haselen (Tiel) opent de discussie met de opmerking, dat het meetkunde-onderwijs speciaal bij het begin zijn grote moeilijkheden biedt. Moeten we met axioma's beginnen? Misschien is het beter ze weg te laten. De heer van Hiele geeft als zijn mening te kennen, dat hij de meetkunde zeker niet axiomatisch wil opbouwen. In de tweede klas komen de axioma's in het algemeen

ter sprake: alleen dát ze er zijn. Eerst geheel op het eind kunnen we een blik geven op een axiomatische opbouw. Dr van Tol (Breda) kan zich niet met de heer van Hiele verenigen, wat betreft de axioma's. Hij bepleit een zó groot mogelijke axiomatische opbouw bij de planimetrie en zeker bij de stereometrie. De hr van H. merkt op, dat bij de stereometrie ook niet met een ax. opbouw begonnen moet worden; voor de ll. is het een nieuw vak, een nieuw gebied, dat ze eerst moeten verkennen. Weliswaar kan nu eerder de axiomatische opbouw beginnen; in zijn cursus na een paar hoofdstukken, maar het onderzoek van het terrein moet vooraf gaan. Prof. Freudenthal merkt nog op, dat hij eerst op de Universiteit begrepen heeft, wat een axioma is. Hierna wordt van dit punt afgestapt. Dr Mooy (Amsterdam) maakt o.m. de opmerking dat het taalgebied van de wiskunde soms beperkter is, soms uitgebreider; bovendien worden vaak buiten de wiskunde aan de wiskundige begrippen een andere betekenis toegekend. Het is soms nodig om dingen, die de ll. op de L. S. geleerd hebben af te leren. Dr Wansink (Arnhem) maakt naar aanleiding van de mening van de hr van H., dat onderzocht dient te worden of het zin heeft stellingen, def. en formules uit het hoofd te laten leren, de opmerking dat hij van mening is, dat uit het hoofd laten leren geen zin heeft, maar het in woorden brengen wel. Dit is een wezenlijk belang van het aanvangswiskunde-onderwijs. De hr van H. is dit met de spr. eens. De hr Orie (Zeist) meent, dat het onjuist is, dat de ll. de studie zelf moeten willen. Moet ook niet eens iets tegen hun wil gedaan worden? Verder bestrijdt de hr Orie de mening, dat vraagstukken met overbodige of onvoldoende gegevens moeten geweerd worden. Op zijn eerste opmerking antwoordt de hr van H., dat hij niet weet of het nuttig is dingen te doen tegen de wil, maar zo ja, dan vraagt hij zich af, of dit nu juist bij het wiskunde onderwijs moet geschieden. Vraagstukken met onvoldoende of overbodige gegevens zou hij speciaal bij het aanvangsonderwijs willen vermijden in verband met het feit, dat de ll. op de L. S. niet geleerd hebben deze situatie het hoofd te bieden. Dr Bunt vraagt wat de inleider heeft bedoeld met ruimtelijk inzicht: aanschouwing of inzicht in het systeem? De hr van H. antwoordt, dat hij het bedoeld heeft in de zin van aanschouwen. Dr Bunt meent, dat zal uitgemaakt dienen te worden of ruimtelijke aanschouwing verhoogd wordt door wiskunde onderwijs. De hr van H. vraagt zich af, of, indien dit onderzoek tot een negatief resultaat mocht leiden, het meetkunde onderwijs dan zin heeft. Dr Wansink is het met Dr Bunt eens, dat het twijfelachtig is of het wiskunde-

onderwijs het ruimtelijk-voorstellingsvermogen verhoogt. (Vermoedelijk is het meningsverschil over dit punt minder groot dan men uit de discussie op zou maken. Naar mijn mening zal de ll. in het stereometrie-onderwijs bij verschillende standaardsituaties aanschouwelijke voorstellingen opdoen, waarvan de herinneringsbeelden later in nieuwe situaties kunnen dienen ter aanvulling en ondersteuning van de onvolkomen directe ruimtelijke voorstellingen. Of de directe ruimtelijke aanschouwing verhoogd wordt, lijkt mij in dit verband van ondergeschikt belang. v. H.)

Naar aanleiding van de vraag, welke kennis de ll. van de L. S. meebrengen, maakt de heer Bunt nog de opmerking, dat daarvoor nodig is te weten, te komen, welke begrippen de ll. beheersen. De hr Leujes (Schiedam) maakt zich ongerust over het peil van de ll. op de M. S. Dit is aan het zakken en z.i. zakt de stof mee. De hr van Hiele meent, dat we inderdaad moeten komen tot een selectie, maar tot een positieve selectie. We moeten ook de weg aangeven voor de ll., die het onderwijs niet kunnen volgen. Spr. bepleit grotere differentiatie. Vele personen komen over deze kwestie aan het woord. De hr Janssen (Bussum) maakt de opmerking, dat er z.i. geen ongeschikte ll. zijn, maar alleen ongeschikte scholen. Het is een fout van het schoolsysteem. Nadat de heer Reckendorf (Ommen) nog de opmerking heeft gemaakt, dat het onjuist is te menen dat aan het loslaten van iets, noodzakelijkerwijs een daling van het peil verbonden is, wordt de discussie over de inleiding van de heer van Hiele voortgezet.

Naar aanleiding van een opmerking van Dr Turkstra (Hilversum) over de opgaven voor het toelatingsexamen voor de M. S., die door het Nutsseminarium te Amsterdam worden verstrekt, komt nogmaals de selectie ter sprake. De hr van Hiele betwijfelt of een selectie aan de hand van deze opgaven inderdaad een correlatie laat zien met latere resultaten van de ll. De hr van H. meent, dat het momenteel toch nog het beste is, af te gaan op het oordeel van het Hoofd der L. S.

Dr Mooy (A'dam) maakt de opmerking, dat vaak gemeend wordt, dat wiskundig redeneren geleerd moet worden aan stof die te moeilijk is. Z.i. kan en moet de stof juist eenvoudig zijn. Verder bepleit hij om sommige onderwerpen nog wat uit te slellen. Hij geeft voorbeelden, waarbij hij door uitstel op grote tijdsbesparing meent te kunnen wijzen. De hr van H. vult deze opmerkingen aan, door als zijn mening naar voren te brengen, dat men de leerstof steeds eerst in afgekorte vorm moet geven.

Naar aanleiding van de entrée voor de Differentiaalrekening

maakt Dr Bunt de opmerking, dat het z.i. zeer goed mogelijk is om niet de mechanica als entrée te gebruiken, maar de helling van een grafiek. De hr van H. meent dat deze kwestie staat en valt met de vraag of de ll. zich een hellingshoek concreet of abstract voorstellen. De snelheid is voor hen een concreet begrip en bovendien interessanter dan een hellingshoek.

Wat betreft de trigonometrie maakt Dr Wansink de opmerking, dat deze het meest is ontaard, maar toch een buitengewoon goede oefenstof is. De hr van Hiele wil de trigonometrie zo beperken, dat de ll. in staat zijn met behulp ervan uit drie gegevens van een driehoek de overige op te lossen.

Over de vraag of Snellius wel of niet behandeld zou moeten worden, bleek men het volkomen oneens te zijn. Eén van de aanwezigen kende een landmeter die uitsluitend Snellius gebruikt, een ander had juist een landmeter gesproken die had verteld, dat ze nooit meer Snellius gebruiken. Tot slot ontstaat nog een discussie over de vraag, in hoeverre ll. wel mechanisch mogen werken. De hr van Hiele had dit afgewezen, doch Dr Mooy beveelt het juist aan. Het spaart ons energie. De ll. moeten bv in een log-tafel mechanisch op kunnen zoeken, mits het feilloos geschiedt. Vele anderen verwerpen echter het uitsluitend mechanisch werken ook. Hebben de ll. met een log-tafel of een rekenliniaal mechanisch leren werken, dan vergeten ze het snel weer en kunnen het later niet meer terug vinden. Mechanisch werk is dus verspilde tijd. Hebben ze het echter met begrip geleerd, dan kunnen ze het later eventueel zelf terugvinden. Nadat nog enkele onbelangrijke punten aan de orde zijn gekomen, wordt de discussie gesloten.

BOEKBESPREKING.

Dr P. Molenbroek, *Leerboek der vlakke Meetkunde*. Tiende druk. P. Noordhoff N.V. 1948, Groningen, Batavia, 638 blz.

Wanneer Molenbroek, die een geestig man was en ook daardoor op „Blijenburg" zeer populair, tot het land der levenden zou terugkeren, dan zou hij ongetwijfeld een kwinkslag ten beste geven over de groei van zijn geesteskind. Hij zou zelfs moeite hebben, het te herkennen, zo weinig is er van het oorspronkelijke nog over.

Is de auteursnaam dus slechts een zaak van piëteit, dit doet niets af aan het feit, dat hier door de stoere werkkracht en goede samenwerking van de heren Wijdenes, Harlaar en Herreilers een werk is ontstaan, dat in ons land zijns gelijke niet heeft.

Wie resp. voor de akte Wiskunde L.O. of voor K I studeert, is op dit leerboek aangewezen, waarbij de eerste weliswaar gedeelten van de theorie en van de vraagstukken kan overslaan, maar toch herhaaldelijk in de verleiding zal komen, op een of ander bijzonder interessant onderwerp dieper dan strikt nodig is in te gaan.

De hoofdverdienste van het boek is wel, dat het 't juiste midden weet te houden tussen volledige, maar afschrikwekkende gestrengheid en een oppervlakkige behandeling, welke over de eigenlijke moeilijkheden zou heenlopen.

Ook aan hen, die hun meetkundige kennis een nieuw aspect willen geven, zoals leraren en studenten, is dit boek bijzonder aan te bevelen. Door de heldere uiteenzetting van de theorie, waarbij de schrijvers verscheidene definitieve verbeteringen in de vroeger gangbare volgorde en methode hebben aangebracht, door de met zorg gekozen voorbeelden en vraagstukken, door de talrijke èn fraai uitgevoerde tekeningen en niet het minst ook door de typografische verzorgdheid van de tekst, zal het bestuderen van dit leerboek voor velen een genot zijn, dat de moeite der inspanning ruimschoots vergoedt.

K. Harlaar geeft in een aanhangsel nog een uiteenzetting van het Axioma-stelsel van Van der Waerden, terwijl historische aantekeningen van Dijksterhuis het eigenlijke werk besluiten, waaraan o.a. nog een uitvoerig register is toegevoegd.

W. P. THIJSEN.

XC. *Over de stelling van Pythagoras.*

1. Om deze stelling te bewijzen, denk ik mij in een vierkant ADGK (fig. 1) een vierkant aangebracht, concentrisch en gelijkstandig met het eerste, en de zijden van het nieuwe vierkant verlengd, tot de verlengden de zijden van vierkant ADGK snijden. Uit de 8 ontstane snijpunten kies ik er 4, die de hoekpunten van een vierkant vormen, en denk me dat vierkant geconstrüeerd. Elk punt van de ontstane figuur, dat bij het bewijs gebruikt wordt, kan met een afzonderlijke letter aangeduid worden; zie bijgaande tekening (fig. 1). Nu is:

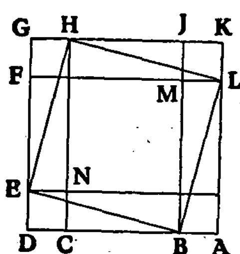
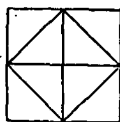
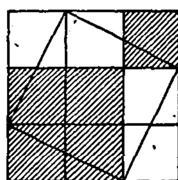


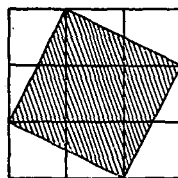
Fig. 1.

vierkant CDEN + vierkant BDFM =
,, JKLM + vierkant BDFM =
,, ADGK — (vierhoek FGJM + vierhoek ABML) =
,, ADGK — 4△BDE =
,, ADGK — (△ BDE + △ EGH + △ HKL + △ ABL) =
,, BEHL.

2. Dit bewijs is door mij op 5 December 1920 bedacht als uitbreiding van een bij de oude Grieken voorkomend bewijs van de stelling van Pythagoras voor een rechthoekig gelijkbenige driehoek (zie fig. 2); het vertoont grote overeenkomst met het bewijs van


Fig. 2.


Fig. 3.


Fig. 4.

Boad (1733) en zijn trawanten (J. J. S. Hoffmann, 1818) [1]; maar verschilt er waarschijnlijk zeer van, wat betreft het uitgangspunt van de redenering; ook is het veel aanschouwelijker, tenminste wanneer er twee figuren bij het bewijzen gebruikt worden (zie fig. 3 en 4).

[1]) Zie J. Versluys, 96 bewijzen voor het theorema van Pythagoras (1914), blz. 50, 51, 52.

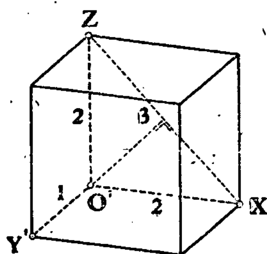
3. Bovenstaand bewijs is zo eenvoudig, dat ik tot voor kort niet anders meende of het was allang bekend; aan publicatie heb ik dus niet gedacht. Uit een gesprek in de 4e week van Juni '48, met Prof. Dr O. Bottema en de heer W. J. Vollewens (leraar R.H.B.S. Schiedam), bleek echter, dat mijn bewijs misschien toch oorspronkelijk is. Mocht dit zo zijn, dan zou ik het willen publiceren.

Gaarne zou ik dus vernemen of iemand, en zo ja wie, mij vóór geweest is in de redenering aan 't begin (onder punt 1).

Schiedam, Aleidastraat 6B. G. POSTMA.

XCI. *Een weinig bekende projectie van een kubus.*

In vrijwel elk boek over beschrijvende meetkunde, dàt op de H.B.S. gebruikt wordt, komt de regelmatige zeshoek voor als projectie van een kubus, en ook in elk leerboek over axonometrie als isometrische projectie van een kubus, waarvan de ribben samenvallen met of evenwijdig zijn aan de assen. Daarentegen komt nevensgaande orthogonale projectie van een kubus in geen enkel der mij bekende boeken voor en zij verdient dat toch wel om haar eigenschappen, en meer in het bijzonder in boeken over de axonometrie om nader aan te geven reden.



Deze projectie wordt verkregen als bv. het snijpunt O van drie ribben OX, OY en OZ van een kubus op een afstand $\frac{1}{3}$OX van het projectievlak ligt en de beide hoekpunten X en Z in het projectievlak liggen. Een eenvoudig bewijs, dat hier slechts aangegeven behoeft te worden, is het volgende:

Stelt men de lengten van de ribben 1 en zijn O′ en Y′ de projecties van resp. O en Y, dan is OO′ $\frac{1}{3}$ en leert een eenvoudige berekening dat O′X, O′Y′, O′Z en XZ resp. $\frac{2}{3}\sqrt{2}$, $\frac{1}{3}\sqrt{2}$, $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ en $\sqrt{2}$ zijn, en bijgevolg O′X : O′Y′ : O′Z : XZ = 2 : 1 : 2 : 3.

Dit bewijs kan, desnoods nog door een hulpfiguurtje toegelicht, in elk leerboek voor de H.B.S. gegeven worden of ook bij de vraagstukken gevraagd worden. Een normale leerling H.B.S. 5 kan dat bewijs zeker begrijpen en een begaafd leerling kan het zeker vinden.

In een boek over axonometrie kan de figuur ook besproken worden als een gemakkelijk te onthouden en te construeeren zuivere

rechte dimetrische projectie van een kubus met verkortingsverhoudingen van de assen 2 : 1 : 2. Uit het voorgaande volgt, dat voor de constructie van de figuur en het bewijs van haar eigenschappen bv. de bekende constructie van Tésar niet noodig is. Daarmee kunnen die eigenschappen uit de aard der zaak ook wel bewezen worden, maar niet eenvoudiger dan hier is aangegeven.

Van theoretisch, en ook praktisch belang, zijn nog de volgende eigenschappen:

1. De projectie van een cirkel, gelegen in het vlak OXY of OYZ, is een ellips, waarvan de assen zich verhouden als 1 : 3.
2. De projectie van een cirkel, gelegen in het vlak OXZ, is een ellips, waarvan de uiteinden van de lange as en een uiteinde van de korte as de hoekpunten zijn van een gelijkbenige driehoek, waarvan de benen tot de basis staan als 2 : 3.

Ook deze eigenschappen zijn zo eenvoudig te bewijzen, dat dit hier wel achterwege kan blijven.

De hier besproken eigenschappen zijn ook van praktisch belang om de volgende reden. In ons land is bij het lager nijverheidsonderwijs bij het zgn. technisch schetsen vrijwel algemeen in gebruik een assenkruis met de verkortingsverhoudingen 2 : 1 : 2. Daarbij wordt de jeugdige leerlingen voorgeschreven de lijnen O'X en O'Y resp. onder hoeken van 7° en 40° met een horizontale lijn te trekken. Daarvoor is dus een gradenboog of een benaderingsconstructie nodig. Die benaderingsconstructie van die hoeken kan ook zijn een benaderings- of een zuivere constructie van het assenkruis met de verkortingsverhoudingen 2 : 1 : 2. Van de verschillende mogelijke zuivere constructies van het assenkruis is die, welke direct volgt uit de figuur, de constructie met de allereenvoudigste verhoudingen 2 : 1 : 2 : 3. Daardoor wordt zij door jeugdige leerlingen zeker even gemakkelijk onthouden als elke andere constructie. Dit laatste ook op gezag van een oud-leerling van mij, die haar met succes bij zijn onderwijs op een ambachtsschool heeft toegepast, evenals de ellipsen met de eenvoudige verhoudingen 1 : 3 en 2 : 3 bij het schetsen van staande en liggende cylinders. Hiermee is het praktisch belang van de figuur ook voldoende toegelicht.

Amsterdam — Ir D. POSTMA.

KORT VERSLAG VAN DE ALGEMENE VERGADERING VAN WIMECOS OP 5 JANUARI 1949 TE AMSTERDAM GEHOUDEN.

Na de opening der vergadering werden achtereenvolgens de Notulen, het Jaarverslag en het Financiëel verslag goedgekeurd. Uit het Jaarverslag zij vemeldt, dat Wimecos op het ogenblik 328 leden en één erelid telt. Onderhandelingen met de Raad van Leraren en Velines hebben er toe geleid, dat de Raad het behoud van de Mechanica als afzonderlijk leervak zal voorstaan, terwijl Velines en Wimecos zich nader over het programma voor dit vak zullen beraden. De Commissie, die deze kwestie zal bestuderen, bestaat uit de H.H. Dr. van den Ende en Dr. Krans voor Velines en Dr. Ir. Staring en Dr. Pekelharing voor Wimecos. In de loop van Januari 1949 zal deze Commissie haar werk beginnen. Nadat de Penningmeester was gedechargeerd, werd de contributie voor het jaar 1 September 1949 t/m 31 Augustus 1950 onveranderd op *f* 4,50 gelaten. Op verzoek van de Penningmeester wordt hieraan toegevoegd, dat aan de leden verzocht wordt dit bedrag op postrekening 143 917 ten name van Wimecos, Amsterdam te storten. Ten overvloede zij hieraan toegevoegd, dat in dit bedrag van *f* 4,50 het abonnementsgeld van Euclides is begrepen.

In de kascommissie zijn de Heren J. D. de Jong en Truyens, resp. uit Haarlem en 's-Hertogenbosch, benoemd.

De Secretaris werd herkozen. De uitbreiding van het Bestuur werd goedgekeurd. De nieuwe bestuursleden zijn de H.H. Dr. Gribnau te Roosendaal en Dr. Wansink te Arnhem.

Besloten werd een circulatie van tijdschriften in te stellen. Getracht zal worden hierbij met het Wiskundig Genootschap samen te werken. Aan het laatste werd per lid een bedrag van *f* 0,25 toegekend. De hoop is uitgesproken, dat op deze wijze een begin van samenwerking zal worden tot stand gebracht.

In de middagzitting is het Rapport over het nieuwe Wiskunde-eindexamenprogramma besproken, nadat eerst de Heer Dr. A. G. Ploeg zijn aangekondige lezing over Verzekeringswiskunde had gehouden, waarvan het verslag in Euclides zal verschijnen. Het rapport werd in zijn geheel aanvaard. Alleen (zie blz. 11 van Euclides, afl. 1/2, jaargang 1948/49) werd bij de beschrijvende meetkunde het programma staande onder D c iets gewijzigd. De nieuwe redactie van D c luidt:

de wenteling van figuren om een as in, evenwijdig aan of loodrecht op het horizontale projectievlak.

Bij de rondvraag werd een voorstel aanvaard, om (natuurlijk gezonde) critiek op eindexamenvraagstukken te verzamelen en ter kennis van de Inspectie te brengen, waarbij de Heer Van Andel de verzekering gaf, dat hiervan zeker notitie zou worden genomen. Vervolgens deelde de Heer Buzeman mede, dat hij bij de op handen zijnde nieuwe verdeling der bestuursfuncties, niet meer het Voorzitterschap zou aanvaarden, daar hem dit in verband met zijn vele werkzaamheden te zwaar werd.

De Secretaris,
J. J. TEKELENBURG.

BERICHT.

De heer J. H. Schogt heeft te kennen gegeven, dat hij zijn werkzaamheden als redacteur van „Euclides" met ingang van 1 Januari 1949 wenste te beëindigen.

Gaarne brengen we hem dank voor wat hij in ruim 20 jaar voor „Euclides" heeft gedaan. Als we eens een beroep op hem mochten doen, hopen we, dat hij ons met de ons allen bekende nauwgezetheid zal willen helpen.

Dr. H. Streefkerk te Hilversum werd bereid gevonden zijn plaats in te nemen.

1 Februari 1949. P. WIJDENES.

SYMBOLEN VOOR DE WISKUNDE.

Beschrijvende Meetkunde *) N 1420 Mei 1947.

I. Regels voor het aanduiden van punten, lijnen en vlakken in rechthoekige projectie

1. De drie projectievlakken, horizontaal projectievlak, verticaal projectievlak en 3e projectievlak genoemd, worden achtereenvolgens aangeduid hetzij met τ_1, τ_2 en τ_3, hetzij met V_1, V_2 en V_3, hetzij met xOy-vlak, xOz-vlak en yOz-vlak, hetzij met XOY-vlak, XOZ-vlak en YOZ-vlak.
2. De snijlijn van het horizontale en het verticale projectievlak heet X-as: de snijlijn van het horizontale en het 3e projectievlak heet Y-as; de snijlijn van het verticale en het 3e projectievlak heet Z-as.
3. Uitgaande van het geval, dat het te projecteren voorwerp recht voor de beschouwer is opgesteld is de drievlakshoek aan de voorwerpszijde van het 3e projectievlak, gelegen boven het horizontale projectievlak en vóór het verticale projectievlak de 1e drievlakshoek, die gelegen boven het horizontale projectievlak en achter het verticale projectievlak de 2e drievlakshoek, die gelegen onder het horizontale projectievlak en achter het verticale projectievlak de 3e drievlakshoek, die gelegen onder het horizontale projectievlak en voor het verticale projectievlak de 4e drievlakshoek. Aan de andere zijde van het 3e projectievlak ligt de 5e drievlakshoek naast de 1e, de 6e drievlakshoek naast de 2e en zo vervolgens.
   De drievlakshoeken worden achtereenvolgens aangeduid met I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII.
4. Punten worden aangeduid met Latijnse hoofdletters.
   Voorbeelden: $A, B, C, \ldots P, Q \ldots$
5. Lijnen worden aangeduid met Latijnse kleine letters; bij regelvlakken worden deze voorzien van aanwijzers.
   Voorbeelden: $a, b, c \ldots l, m$; $a_1, a_2, a_3 \ldots, b_1, b_2, b_3 \ldots$
6. Projecties van punten en lijnen op de projectievlakken worden gekenmerkt door hun letteraanduidingen te voorzien van accenten. De aanduiding van een projectie op het horizontale vlak geschiedt met één accent, die op het verticale vlak met een dubbel accent en die op het 3e projectievlak met een drievoudig accent.
   Voorbeelden: A', A'', A'''; a', a'', a'''; a_1', a_1'', a_1'''.
7. Punten en lijnen, welke in de projectievlakken liggen, behoeven in hun aanduiding niet van accenten te worden voorzien.
8. Vlakken worden aangeduid met Latijnse hoofdletters of met Griekse kleine letters. Deze worden geplaatst bij het snijpunt met de X-as; bij de horizontale en verticale doorgang wordt dezelfde letter geplaatst, onderscheidenlijk met de aanwijzers 1 en 2.
   Voorbeelden: U, W, α, β, ϱ, (raakvlak), σ (snijvlak), π (parallelvlak), μ (meridiaanvlak); U_1, U_2, α_1, α_2.
9. Elementen, welke zijn neergeslagen in een der projectievlakken, worden gekenmerkt door aan hun letteraanduiding de aanwijzer n toe te voegen.
   Voorbeelden: P_n, a_n, l_n, $W_{1,n}$, $\beta_{1,n}$.

II. Regels voor het aanduiden van punten, lijnen en vlakken in axonometrische en scheve projectie en in perspectief.

1. Bij de *axonometrische projectie* worden de coördinaatvlakken aangeduid hetzij met τ_1, τ_2 en τ_3, hetzij met xOy-, xOz- en yOz-vlak, hetzij met XOY-vlak, XOZ-vlak en YOZ-vlak. Het tafereel wordt aangeduid met τ.
   Bij de gebruikelijke methode van *scheve projectie* is $\tau = \tau_2$.

---

*) „Overgenomen met toestemming van de Hoofdcommissie voor de Normalisatie in Nederland." Origineel met een figuur als voorbeeld verkrijgbaar bij de Uitgeverij Waltman, Delft, Hippolytusbuurt 4.

2. De rechthoekige projecties van punten en lijnen op de coördinaatvlakken alsmede de doorgangen van vlakken worden op dezelfde wijze aangeduid als onder I is aangegeven. De aanduidingen van axonometrische projecties behoeven niet van accenten en die van axonometrische doorgangen niet van aanwijzers te worden voorzien. Van een element, dat tot in het tafereel is gewenteld, wordt de aanduiding voorzien van de aanwijzer *n*.
3. Bij de *gewone perspectief* wordt het tafereel aangeduid met τ, het grondvlak met τ_1, de horizon met *HZ*, de grondlijn met *GL*. Rechthoekige projecties op τ_1 worden aangeduid met één accent; de doorgang van een vlak met τ_1 krijgt de aanwijzer 1. Rechthoekige projecties op τ worden aangeduid met een dubbel accent of de aanwijzer I,
   bv.: A'' of A_1, a'' of a_1. Het hoofdpunt (oogpunt) wordt aangeduid met O'', O_1 of *P*.
   Centrale projecties op τ en doorgangen van vlakken met τ krijgen onderscheidenlijk geen accenten of aanwijzers.
4. Bij de *vrije centrale projectie* worden de projecties van punten en lijnen voorzien van één accent; het doorgangspunt en het vluchtpunt van een rechte *a* worden onderscheidenlijk aangeduid met D_a en V_a; de doorgang en de vluchtlijn van een vlak α worden onderscheidenlijk aangeduid met d_a en v_a.

III. Lijnsoorten voor het aanduiden van punten, lijnen en vlakken

Na voltooiing van een constructie, bij welke aanvankelijk alle lijnen zijn aangegeven door doorlopende dunne potloodlijnen, kan de tekening als volgt worden opgewerkt.

1. Assen (eventueel de positieve delen der assen), zichtbare lijnen en doorgangen worden aangeduid met een dikke lijn.
2. Onzichtbare lijnen worden aangeduid met een gestreepte lijn, waarvan de dikte naar keuze dezelfde of ongeveer de helft is van de onder III 1 genoemde lijn.
3. Verbindingslijnen van twee rechthoekige projecties van hetzelfde punt worden aangeduid met een gestreepte lijn, waarvan de dikte ongeveer een vierde bedraagt van de onder III 1 genoemde lijn.
4. Constructielijnen worden aangeduid met een lijn, waarvan de dikte ongeveer een vierde bedraagt van de onder III 1 genoemde lijn.
5. Hartlijnen worden aangeduid met een streep-stiplijn, waarvan de dikte ongeveer een vierde bedraagt van de onder III 1 genoemde lijn.
6. Ontwikkelingen en uitslagen worden aangeduid met lijnen, waarvan de dikte ongeveer de helft bedraagt van de onder III 1 genoemde lijn.
7. Vlakke doorsneden en projecties daarvan worden met een zwarte of gekleurde arcering aangegeven.
8. Onderdelen van een samengestelde constructie mogen met lijnen van verschillende kleur worden aangegeven.

SIMON STEVIN.

Voordracht ter gelegenheid van den 400^{en} *terugkeer van Stevins geboortedag gehouden op* 7 *November* 1948 *voor het Genootschap voor Geschiedens der Geneeskunde, Wiskunde en Natuurwetenschappen*

door

E. J. DIJKSTERHUIS.

Naast de grote herdenkingen van nationalen aard, die het jaar 1948 ons gebracht heeft, die van den vrede van Munster in 1648 en die van de Grondwetsherziening in 1848, neemt de viering van het vierde eeuwfeest van de geboorte van Simon Stevin een uiterlijk slechts zeer bescheiden plaats in. De dag- en weekbladpers heeft er geen notitie van genomen en van officiële zijde is er, anders dan toen in 1929 de geboortedatum van Chr. Huygens voor de 300e maal terugkeerde, geen aandacht aan gewijd. Er zijn twee tijdschrift-artikelen naar aanleiding van het jubileum verschenen, maar een bijeenkomst met het doel, Stevins nagedachtenis viva voce te eren, is voor die van vandaag niet gehouden.

In België is dat wel anders geweest. Zo heeft daar de stad Brugge, die altijd vol belangstelling is voor haar grote zonen Jan van Eyck, Hans Memlinc, Simon Stevin en Guido Gezelle, in Juni een zeker feestvertoon te zijner ere ontplooid en in een officiële zitting ten stadhuize zijn betekenis zowel door een Noord- als door een Zuid-nederlandsen spreker doen uiteenzetten. En binnenkort zal de Koninklijke Vlaamse Academie van Wetenschappen een speciale huldigingsvergadering aan hem wijden.

Ik wil niet hopen, dat dit verschil zijn oorsprong heeft gevonden in de overweging van onze Zuidelijke stamgenoten, dat Stevin door zijn geboorte aan hen toebehoort en die van de Nederlanders, dat hij ten slotte toch een Belg en dus hier een vreemdeling was. Dat zou namelijk zowel getuigen van een gebrekkig inzicht in de staatkundige situatie in den tijd, waarin hij in de Noordelijke Nederlanden kwam, als van een gemis aan besef, welk een waarde in de thans weer nagestreefde toenadering tussen de door den loop der historische gebeurtenissen van elkaar gescheiden geraakte gewesten aan een figuur als de zijne, die, in het Zuiden geboren, in het Noorden zijn levenswerk verrichtte en daar helemaal niet het gevoel had, dat hij in een vreemd land verbleef, moet worden gehecht.

Liever wil ik aannemen, dat de onverschilligheid, die hier te lande te zijnen aanzien is en wordt betoond, een speciaal symptoom is van het algemene verschijnsel, dat het zoveel moeilijker is, de culturele betekenis van grote figuren uit het verleden der wetenschap tot het bewustzijn van latere generaties te doen doordringen dan die van kunstenaars. Wetenschappelijke arbeid is vóór alles collectief: het bouwwerk van ons weten en kunnen verrijst langzamerhand, doordat in iedere generatie iedere medewerker grotere of kleinere stenen aandraagt om het op te trekken. Wie van jongs af in een hogere laag is opgevoed en werkt en a fortiori wie er helemaal niet werkt en alleen profiteert van de bereikte hoogte, denkt, wanneer zijn aanleg hem er althans niet toe drijft, gewoonlijk niet meer terug aan het moeizame werk van vroegere geslachten, waardoor zijn geestelijk niveau toch eerst mogelijk is gemaakt. De resultaten van hun arbeid zijn reeds lang zonder individuele herkenbaarheid als elementaire kennis of schijnbare vanzelfsprekendheid in zijn denken opgenomen en worden niet meer als vondsten beseft.

Met prestaties op het gebied van de kunst is het heel anders gesteld. Van het werk, dat dichters, componisten of beeldende kunstenaars in vroegere eeuwen geschapen hebben kan door wie er gevoelig voor is, vandaag nog spontaan worden genoten en al zal historische kennis van de periode, waarin zij leefden en werkten, er toe kunnen bijdragen, dat genot te verdiepen, zo is ze er toch geen onmisbare voorwaarde voor. Tot het besef van historische waarden op wetenschappelijk gebied draagt echter wetenschappelijke zin als zodanig zonder den steun van historische ontwikkeling niets bij; het ontstaat nooit spontaan, maar altijd eerst door reflectie. Het vereist het vermogen en den lust om te abstraheren van al de kennis en al het inzicht, die later verkregen zijn en die reeds ons geestelijk eigendom zijn geworden.

Dat het een essentiëel verschil betreft, merkt men nooit duidelijker dan wanneer men met iemand, die zich nooit speciaal met wetenschapsgeschiedenis heeft beziggehouden, over grote figuren uit dit gebied spreekt en deze nu in een adem noemt met beroemde kunstenaars of wijsgeren uit denzelfden tijd. Hij zal wellicht gaarne bereid zijn, een groot hedendaags natuuronderzoeker met thans levende artisten en philosofen op één lijn te stellen, maar hij voelt zich geschokt, wanneer ge naast Plato Eudoxos of Archimedes noemt, naast Vondel en Rembrandt Christiaan Huygens stelt of Stevin naast Hooft of wanneer ge den Pascal die de *Traités de l'Equilibre des Liqueurs et de la Pesanteur de l'Air* schreef, even-

belangrijk vindt als den auteur van de *Pensées*. Bevreemd informeert hij naar de aanspraken, die de genoemde figuren op zo hoge waardering kunnen doen gelden en zijn bevreemding neemt toe, als ge hem vertelt, dat Eudoxos exacte theorieën over irrationale grootheden en oneindige processen opstelde, Archimedes inhoud en oppervlakte van den bol en zijn delen leerde bepalen en de quadratuur van de parabool vond, Christiaan Huygens een slingeruurwerk construeerde, de verschijnselen van cirkelbeweging en botsing leerde begrijpen en de dubbele breking verklaarde, Stevin decimale breuken invoerde en een vernuftig bewijs voor de wet van het hellend vlak gaf en Pascal in de *Traités*, die men na zijn dood te Port Royal „tellement au dessous de lui" vond, dat men ze helemaal niet wilde publiceren, de hydrostatica wetenschappelijk leerde opbouwen en de verklaring van de proef van Torricelli met behulp van den luchtdruk buiten twijfel stelde. Dat zijn, merkt hij op, alles puur interne aangelegenheden van wiskunde en natuurwetenschap, die als zodanig de cultuur niet raken en ten dele reeds lang zo triviaal en elementair zijn geworden, dat ze zijn afgedaald tot den rang van leerstof voor beginnelingen. Wilt ge, zo vraagt hij min of meer verontwaardigd, aan dergelijke verrichtingen een even hoge waardering hechten als aan meesterwerken van wijsgerig denken, artistieke scheppingskracht of religieuse bewogenheid?

De reactie is begrijpelijk en om dezelfde reden is het de wijd verspreide onverschilligheid ten aanzien van de wetenschapsgeschiedenis, die door het bestaan van dit Genootschap als de regel door de uitzondering bevestigd wordt. Wer den Dichter will verstehen muss in Dichters Lande gehen, heeft Goethe gezegd. En analoog hieraan geldt: wie een wetenschappelijk werker uit vroegere tijden wil begrijpen, moet zich in zijn denken terugverplaatsen in den tijd, waarin hij leefde, zich op de hoogte stellen van den graad van ontwikkeling, dien de wetenschap destijds bezat, denken in de begrippenwereld, waarin hij werd opgevoed, spreken in de termen, waarin hij zich leerde uitdrukken, zich bedienen van de methoden, die hem ter beschikking stonden. Eerst dan herrijzen de resultaten van zijn denken uit de diepten van trivialiteit, waarin ze voor het bewustzijn van den onhistorischen mens reeds lang verzonken zijn, eerst dan leert men iets navoelen van de ontdekkersvreugde, die verbonden is geweest aan het vinden van dingen, die nu door schoolkinderen, in den regel zonder vreugde, worden geleerd; eerst dan beseft men den omvang en de waarde van het geestelijk bezit, dat door de beoefenaren der wetenschap in hun gezamenlijken arbeid door de eeuwen heen is vergaard. Maar de